Die Beschreibung des Neutron-Transfers in Resonanzzustände als Streuung außerhalb der Massenschale

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der

Freien Universität Berlin

Fachbereich Physik

vorgelegt von

Klaus Möhring

aus Fritzlar

- Mai 1974 -

Die Beschreibung des Neutron-Transfers in Resonanzzustände als Streuung außerhalb der Massenschale

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der

Freien Universität Berlin

Fachbereich Physik

vorgelegt von

Klaus Möhring

aus Fritzlar

- Mai 1974 -

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Gutachter: Priv.-Doz. Dr. R. Lipperheide

2. Gutachter: Prof. Dr. V. Linke

Tag der mündlichen Prüfung:

Tag der Promotion:

Inhaltsverzeichnis

		Seite
	Zusammenfassung	1
1.	Einleitung	2
2.	Parametrisierung des (d,p)-Wirkungsquerschnittes durch die off-shell Neutron-Streuamplitude	9
	2.1 Die Beschreibung der Reaktion durch Feynman-Graphen	9
	2.1.1 Die Pol-Graphen-Näherung	9
	2.1.2 Berücksichtigung der Wechselwirkung in Ein- und Ausgangskanal	13
	2.1.3 Berücksichtigung der Interferenz mit anderen Prozessen	16
	2.2 Die DWBA-Beschreibung der Reaktion	20
	2.3 Vergleich der Graphen-mit der DWBA-Amplitude	24
	2.4 Die detaillierte Form des differentiellen Wirkungsquerschnitts	26
3.	R-Matrix-Theorie der off-shell Streuamplitude	30
	3.1 Potentialstreuung	31
	3.1.1 Die off-shell Amplitude für die Streuung an zwei Potentialen	31
	3.1.2 Die R-Matrix-Form der off-shell Streuamplitude	34
	3.1.3 Streuung in eine isolierte Resonanz	37
	3.2 Allgemeine Kernreaktionen	40
	3.2.1 Die off-shell Reaktionsamplitude	40
	3.2.2 Die off-shell Breit-Wigner-Formel für eine isolierte Resonanz	42

Seite

4. Der Vergleich der Resonanzen im (d,p)- und im totalen Neutron-Wirkungsquerschnitt 47

4.1 Pseudogebundener Resonanzzustand 48

4.2 Bestimmung der Resonanz-Formfaktoren im allgemeinen Fall 50

4.3 Berechnung der Ein-Teilchen-Funktion u_λ^o 53

4.4 Vergleich der Wirkungsquerschnitte in symmetrischen Resonanzen 54

5. Anwendungen 58

5.1 Das numerisch behandelte Modell 58

5.2 Berechnung der radialen Integrale 59

5.3 Vergleich von $^{15}N(d,p)$ und $^{15}N(n,total)$ 61

5.3.1 Die verwendeten Parameter 65

5.3.2 Die Drehimpulsabhängigkeit der off-shell Streuamplitude und der Einfluß des Proton-Transfers 67

5.3.3 Die Ergebnisse für symmetrische Resonanzen 69

5.3.4 Die Interferenzstruktur bei E_x = 5.730 MeV 75

5.4 Vergleich von $^{24}Mg(d,p)$ und $^{24}Mg(n,total)$ 76

5.4.1 Die Resonanzen bei E_x = 8.32 MeV und E_x = 8.36 MeV 78

5.4.2 Die symmetrischen Resonanzen 78

Seite

6. Zusammenfassende Diskussion 82

ANHANG I:
Die off-shell Streuamplitude im Schalenmodell der Kernreaktionen 87

ANHANG II:
Zur Berechnung der radialen Matrixelemente 92

Literaturverzeichnis 97

Zusammenfassung

Es wird der Zusammenhang des Resonanzverhaltens einer Neutron-Transferreaktion mit dem der elastischen Streuung bzw. des totalen Wirkungsquerschnittes des Neutrons untersucht.

Dazu wird die Parametrisierung des Wirkungsquerschnitts der Transferreaktion in eine Resonanz durch die Neutron-Target-Streuamplitude außerhalb der Massenschale (off-shell) formuliert und die sich daraus ergebende Vergleichsmöglichkeit von Resonanzen im (d,p)- und im totalen Neutron-Wirkungsquerschnitt diskutiert.

Die Transferreaktion wird als direkter Ein-Stufen-Prozeß in einer DWBA-äquivalenten Näherung durch nicht-relativistische Feynman-Graphen beschrieben, die die Wechselwirkung im Ein- und Ausgangskanal sowie die Interferenz mit kohärenten, nicht zur Resonanz führenden Prozessen berücksichtigen.

Die off-shell Streuamplitude wird im Rahmen der R-Matrix-Theorie der Kernreaktionen beschrieben, und für isolierte Resonanzen eine off-shell Verallgemeinerung der Breit-Wigner-Formel hergeleitet.

Es wird gezeigt, daß der über eine Resonanz integrierte (d,p)-Wirkungsquerschnitt, wenn man nur das auslaufende Proton beobachtet, proportional ist zum entsprechend integrierten totalen Neutron-Wirkungsquerschnitt am gleichen Target, und der Quotient aus beiden auf charakteristische Weise vom Bahndrehimpuls des Neutrons relativ zum Target abhängt.

Die numerische Anwendung der Theorie auf den Vergleich der Reaktionen ^{15}N(d,p) und ^{15}N(n,total), sowie ^{24}Mg(d,p) und ^{24}Mg(n,total) bestätigt die Gültigkeit des für die Transferreaktion angenommenen Reaktionsmechanismus und erlaubt die Bestimmung der übertragenen Drehimpulse für die beobachteten Resonanzen im Bereich einiger MeV oberhalb der Neutron-Schwelle.

1. Einleitung

Die Untersuchung gebundener Kernzustände mit Hilfe direkter Transferreaktionen ist ein seit langem mit Erfolg angewandtes Verfahren. Dabei hat sich die numerisch einfach handhabbare theoretische Beschreibung der Reaktionen als Ein-Stufen-Prozesse im Rahmen der Distorted Wave Born Approximation (DWBA)[1,2,3] für die meisten Fälle als ausreichend erwiesen, um Aussagen über Quantenzahlen und Struktur (spektroskopische Faktoren) der untersuchten gebundenen Zustände machen zu können.

In den letzten Jahren hat sich das Interesse mehr und mehr auch der analogen Untersuchung von Resonanzzuständen mit Ein-Teilchen-Transferreaktionen zugewandt, Wir beschränken uns hier auf die (d,p)-Reaktion

$$A + d \longrightarrow B^* + p \longrightarrow b_1 + b_2 + p . \qquad (1.1)$$

Da in einer solchen Reaktion drei Teilchen im Endzustand auftreten, ergeben sich für die theoretische Beschreibung allerdings Schwierigkeiten. Die zur Beschreibung des Transfers in ein gebundenes System B üblicherweise benutzte und insbesondere in Null-Reichweite Näherung für das Deuteron[2,3] einfach auswertbare DWBA-Amplitude

$$M^{DWBA}_{A(d,p)B\,(geb.)} = \langle \chi_f^{(-)}\, \varphi_B \,|\, V_{pn} \,|\, \varphi_d\, \chi_i^{(+)} \rangle , \qquad (1.2)$$

wo χ_i und χ_f die optischen Wellenfunktionen im Ein- und Ausgangskanal, φ_d und φ_B die gebundenen Zustände des Deuterons und des Endkerns und V_{pn} die Neutron- Proton-Wechselwirkung sind[1,2,3], kann nicht ohne weiteres für den Transfer in einen Resonanz-, also ungebundenen Zustand herangezogen werden. Denn ersetzt man in (1.2) die gebundene Wellenfunktion φ_B durch den Zustand des Systems B im Kontinuum,

so ist das so entstehende Matrixelement in der Regel divergent. Verschiedene Modifikationen der Amplitude (1.2), die deren Anwendung auf Transferreaktionen in Resonanzzustände erlauben, sind von Huby und Mines[4], Noble[5] und Bunakov[6] eingeführt worden und eine so modifizierte DWBA-Amplitude ist in den meisten bisher zu Transferreaktionen ins Kontinuum erschienenen theoretischen Arbeiten[4-23] benutzt worden. Auf die der Beschreibung der Reaktion für gebundene Zustände am ähnlichsten bleibende Abänderung von (1.2) durch Huby und Mines[4] werden wir im Kapitel 2 dieser Arbeit zurückkommen.

Ansätze zur Beschreibung der Reaktion (1.1) im Rahmen der von Shapiro entwickelten Theorie der nicht-relativistischen Feynman-Graphen[24,25] sind von Lipperheide[26], von dessen Behandlung des Problems noch detailliert die Rede sein wird, und von Borbely, Dolinskii et al. ("peripheral model")[27-31] vorgeschlagen werden. Auch hier wird für den Transfer ein direkter Ein-Stufen-Prozeß angenommen.

Für die Diskussion der Reaktion (1.1) im Rahmen einer strengen Drei-Körper-Theorie seien nur die Arbeiten von Takeuchi[32] erwähnt und auf die dort zitierte Literatur verwiesen.

Ein weiteres Problem bei der Untersuchung von Resonanzen mit Transferreaktionen ist die angemessene Beschreibung des erreichten Zustandes im Kontinuum.

Bei der DWBA-Analyse des Transfers in einen gebundenen Zustand beschreibt man diesen üblicherweise als eine Entwicklung nach einem Satz von geeigneten Modellzuständen und bestimmt aus dem Vergleich der Theorie mit dem Experiment spektroskopische Faktoren als den oder die dominanten Koeffizienten dieser Entwicklung[1-3], im einfachsten Fall also als den Überlapp des beobachteten mit einem Modellzustand.

Eine solche Analyse ist für Resonanzzustände, allein schon wegen der Problematik nicht endlicher Skalarprodukte im Kontinuum, nicht ohne weiteres durchführbar.

Eine sinnvolle Möglichkeit des Vergleichs zwischen Theorie und Experiment bieten aber die Resonanzbreiten. Wir können deshalb als spektroskopischen Faktor das Verhältnis der beobachteten zur mit einem Modellzustand berechneten Breite einer Resonanz definieren.

Als Modellwellenfunktionen zur Beschreibung eines Resonanzzustandes sind in der Literatur in diesem Zusammenhang i.w. vier Klassen von Resonanzwellenfunktionen betrachtet worden: pseudogebundene Zustände[13-15], Gamow-Funktionen[12,19], Ein-Teilchen-Streufunktionen[6,8,9,18] und Resonanz-Eigenzustände von Mehr-Teilchen-Hamiltonoperatoren, wie Weinberg-Zustände[33,15-17] und die von Fano eingeführten "bound states imbedded in the continuum"[7,10,11]. Ein Vergleich der ersten drei Typen von Wellenfunktionen ist in einem Kasten-Potential-Modell[34] durchgeführt worden.

Für alle diese Ansätze ist allerdings fraglich, wieweit sie, insbesondere für schmale Resonanzen, die auf komplizierte Compound-Zustände schließen lassen, überhaupt eine relevante Näherung an den zu untersuchenden Resonanzzustand darstellen können und damit die Extraktion sinnvoller spektroskopischer Faktoren aus dem Vergleich mit dem Experiment erlauben.

Wegen dieser Schwierigkeiten soll in dieser Arbeit die Transferreaktion in einen Resonanzzustand, (1.1), unter einem anderen Aspekt untersucht werden. Gehen wir von der einfachsten Vorstellung eines Ein-Stufen-Transfers ins Kontinuum aus: Das eingeschossene Deuteron bricht im Feld des Targets auf und das Neutron bildet mit dem Target eine Resonanz, die dann wieder zerfällt, während das Proton unbehelligt herausfliegt. Dann handelt es sich im einfachsten

Fall im wesentlichen um elastische Streuung des Neutrons am Target in einer Resonanz, wo allerdings das Neutron, da es aus einem gebundenen Zustand kommt, virtuell oder außerhalb der Massenschale ("off-shell") ist, d.h. für seine Energie E und asymptotischen Impuls p $E \neq p^2/2$ gilt. Die gleiche Resonanz kann natürlich auch in der elastischen Streuung eines freien, reellen Neutrons beobachtet werden, so daß wir die Streuung eines reellen und eines virtuellen Neutrons miteinander in Beziehung setzen können.

Nehmen wir weiterhin an, daß in der (d,p)-Reaktion nur das auslaufende Proton im Experiment nachgewiesen wird, so daß wir den Wirkungsquerschnitt über alle möglichen Zerfallskanäle des Resonanzzustandes summieren müssen, ist klar, daß wir im wesentlichen die totalen Wirkungsquerschnitte auf der und außerhalb der Massenschale ("off"- und "on-shell") vergleichen müssen.

Ein solcher Vergleich eröffnet zwei Möglichkeiten. Zum einen, wenn wir davon ausgehen, daß die Unterschiede in der Streuung eines reellen und eines virtuellen Neutrons, die ja auf dem unterschiedlichen Neutron-Impuls relativ zu seiner Energie beruhen, im wesentlichen durch kinematische Größen gegeben sind, können wir versuchen, durch Verhältnisbildung der beiden Wirkungsquerschnitte die nicht von der Kinematik, sondern von der Struktur abhängigen Größen, wie spektroskopische Faktoren, herauszukürzen und so die Kinematik, wie etwa den transferierten Drehimpuls, unabhängig von der so schlecht bekannten Struktur zu untersuchen.

Für gebundene Endzustände ist die Bestimmung des übertragenen Drehimpulses oft schon aus der Struktur der Winkelverteilung des auslaufenden Protons bei kleinen Winkeln und damit unabhängig von der Struktur des erreichten Zustandes möglich[2]. Wie schon bei hochangeregten gebundenen Zuständen sind aber, wie wir sehen werden, die Winkelverteilungen für

den Transfer in Resonanzen mehr oder weniger strukturlos, so daß eine alternative, strukturunabhängige Drehimpulsbestimmung besonders wünschenswert ist.

Zum anderen ergibt sich aus dem Vergleich, da ja das Auftreten eines totalen Wirkungsquerschnitts im Transfer-Wirkungsquerschnitt ganz wesentlich von dem angenommenen Reaktionsmechanismus abhängt, die Möglichkeit, diesen Mechanismus zu testen, wenn wir den Zusammenhang der totalen Wirkungsquerschnitte beschreiben können.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist der von Lipperheide[26] aus der Theorie der nicht-relativistischen Feynman-Graphen[24,25] hergeleitete Zusammenhang des (d,p)-Wirkungsquerschnittes, wo nur das auslaufende Proton beobachtet wird, mit der Neutron-Target-Streuamplitude außerhalb der Massenschale - eine Verallgemeinerung des oben im einfachsten Bild der Reaktion beschriebenen Zusammenhanges mit dem totalen Wirkungsquerschnitt des virtuellen Neutrons.

Die Parametrisierung des differentiellen (d,p)-Wirkungsquerschnittes in einer Resonanz durch die off-shell Neutron-Target-Streuamplitude wird in Kapitel 2 formuliert. Wir beschreiben die Reaktion durch nicht-relativistische Feynman-Graphen als direkten Ein-Stufen-Prozeß und berücksichtigen die Wechselwirkung im Ein- und Ausgangskanal sowie den Einfluß zum Neutron-Transfer kohärenter Reaktionen in den gleichen Endzustand. Durch Vergleich mit der DWBA-Beschreibung, wie sie von Huby und Mines[4] formuliert worden ist, reduzieren wir das Ergebnis auf eine DWBA-äquivalente Näherung.

Die Bestimmung der off-shell Streuamplitude ist prinzipiell in jeder der bekannten Theorien der Kernreaktionen möglich. Da wir aber eine möglichst von der mikroskopischen Struktur der zu untersuchenden Resonanzen unabhängige Diskussion der Transferreaktion anstreben, diskutieren wir die off-shell-Am-

plitude in Kapitel 3 im Rahmen der R-Matrix-Theorie der Kernreaktionen[35,36], die eine einfache und physikalisch durchsichtige Parametrisierung der beobachteten Resonanzen erlaubt. Die Resonanzparameter können aus Messungen der elastischen Streuung bzw. des totalen Wirkungsquerschnittes experimentell bestimmt werden und diese Werte in den Ausdruck für die off-shell Streuamplitude bzw. den Transferwirkungsquerschnitt eingesetzt werden. Auf diese Weise wird sich eine einfache und von der detaillierten Struktur der Resonanz unabhängige Vergleichsmöglichkeit beider Reaktionen ergeben.

Die Parametrisierung des Transferwirkungsquerschnitts in Resonanzen durch die R-Matrix-Streuamplitude außerhalb der Massenschale wird in Kapitel 4 diskutiert. Wir bestimmen die sich ergebenden Neutron-Formfaktoren, wie sie in die DWBA Matrixelemente eingehen, und stellen den expliciten Zusammenhang mit dem totalen Neutron-Wirkungsquerschnitt auf der Massenschale her.

Die numerische Anwendung dieses Ergebnisses auf den Vergleich der Reaktionen $^{15}N(d,p)$ und $^{15}N(n,total)$ sowie $^{24}Mg(d,p)$ und $^{24}Mg(n,total)$ und insbesondere die daraus resultierende Bestimmung der in die beobachteten Resonanzen übertragenen Drehimpulse wird in Kapitel 5 beschrieben.

Kapitel 6 enthält eine abschließende Diskussion.

Um zu zeigen, inwieweit die in Kapitel 3 gewonnenen Ergebnisse unabhängig sind von den speziellen Eigenschaften der R-Matrix-Theorie, und als Beispiel einer mikroskopischen Reaktionstheorie diskutieren wir im Anhang I kurz die Darstellung der off-shell Streuamplitude im Schalenmodell der Kernreaktionen[37].

In Anhang II sind die mathematischen Einzelheiten zur Berechnung der radialen DWBA-Matrixelemente mit drei Teilchen im Endzustand zusammengestellt worden.

In allen Formeln dieser Arbeit ist $\hbar$ gleich Eins gesetzt worden. Sämtliche Massen werden mit dem Buchstaben μ bezeichnet. μ_n bezeichnet also die Masse eines Neutrons, μ_{np} die reduzierte Masse eines Neutron-Proton-Systems. Alle Kontinuumswellenfunktionen sind auf $(2\pi)^3 \delta(\vec{k}-\vec{k}')$ normiert worden.

2. Parametrisierung des (d,p)-Wirkungsquerschnittes durch die off-shell Neutron-Streuamplitude

2.1 Die Beschreibung der Reaktion durch Feynman-Graphen

2.1.1 Die Pol-Graphen-Näherung

Analog dem Transfer eines Neutrons in einem gebundenen Zustand beschreiben wir die Reaktion A(d,p)B in einen Resonanzzustand B^* als einen direkten Ein-Stufen-Prozeß. Vernachlässigen wir zunächst die Wechselwirkungen im Ein- und Ausgangskanal, entspricht eine solche Beschreibung dem in Fig. 1 abgebildeten Pol-Graphen. Nach der von Shapiro[24,25]

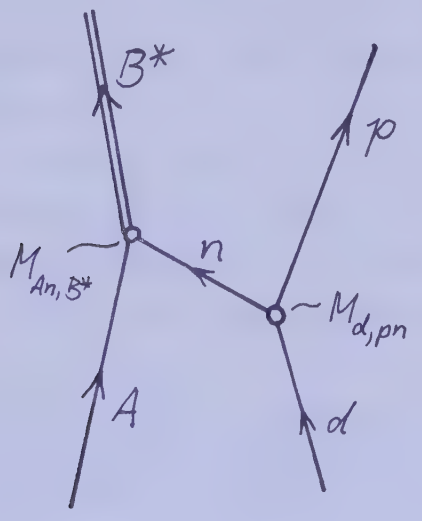


Fig. 1: Der Polgraph zur Beschreibung des direkten Transfers.

entwickelten Theorie der nichtrelativistischen Feynman-Graphen ist die Amplitude dieses Pol-Graphen, M^P, gegeben durch ($\varepsilon \to 0^+$)

$$M^P_{Ad,pB^*} = M^+_{d,pn}(\vec{q}_{pn}; \varepsilon_d) \frac{1}{E_{nA} + i\varepsilon - q^2_{nA}/2\mu_{nA}} M_{nA,B^*}(\vec{q}_{nA}; E_{nA}) \quad (2.1)$$

Hier sind $\vec{q}_{nA}$, E_{nA}, μ_{nA} der Impuls, die Energie und die reduzierte Masse des transferierten Neutrons relativ zum Target A, $\vec{q}_{pn}$ der Proton-Neutron-Relativimpuls und ε_d die Bindungsenergie des Deuterons.

$M_{d,pn}$ ist die Amplitude für den virtuellen Aufbruch des Deuterons,

$$M_{d,pn}(\vec{q}_{pn};\varepsilon_d) = \int e^{-i\vec{q}_{pn}\vec{r}_{pn}} V_{pn}(r_{pn})\,\varphi_d(\vec{r}_{pn})\,d\vec{r}_{pn} \qquad (2.2)$$

mit der Proton-Neutron-Wechselwirkung V_{pn} und der Deuteron-Grundzustandswellenfunktion φ_d . M^+ bezeichnet die hermitesch adjungierte Amplitude. Die Amplitude

$$M_{nA,B^*}(\vec{q}_{nA};E_{nA}) = \int \Psi^{(-)*}_{B^*}(\vec{r}_{nA},\xi)\,V_{nA}(\vec{r}_{nA},\xi)\,e^{i\vec{q}_{nA}\vec{r}_{nA}}\,\phi_A(\xi)\,d\xi\,d\vec{r}_{nA} \qquad (2.3)$$

beschreibt die Reaktion des transferierten Neutrons mit dem Target in einen Resonanzzustand B^*, der dann in einen Kanal B zerfällt. B^* bezeichnet also sowohl die Resonanz des Neutron-Target-Systems als auch den Kanal, in den sie zerfällt - als Spezialfall also etwa den elastischen Kanal $n+A$ - mit allen zur eindeutigen Festlegung notwendigen Größen. Nur die nicht auf der Massenschale liegenden Impulse und die zugehörigen Energien sind als Argumente explicit aufgeführt. In Gl. (2.3) ist ϕ_A der Grundzustand des Targets mit der Energie W_A und $\Psi^{(-)}_{B^*}$ der Resonanzzustand des Systems B^* mit der Energie W_{B^*}, der asymptotisch, außer im Kanal B, rein einlaufend ist. Das Neutron ist, da der Deuteron-Grundzustand stabil ist, virtuell oder außerhalb der Massenschale, d.h. es gilt

$$\frac{\vec{q}^{\,2}_{nA}}{2\mu_{nA}} - E_{nA} = \frac{\vec{q}^{\,2}_{pn}}{2\mu_{pn}} + \varepsilon_d \neq 0\,, \quad E_{nA} = W_{B^*} - W_A\,. \qquad (2.4)$$

Die Pol-Graphen-Amplitude (2.1) ist, nebenbei bemerkt, identisch mit der der üblichen PWBA[38].

Lipperheide[26] hat gezeigt, daß der mit dieser Amplitude berechnete differentielle Wirkungsquerschnitt der Reaktion (1.1), wenn man nur das auslaufende Proton beobachtet, proportional ist zum totalen Neutron-Target-Wirkungsquerschnitt $\sigma_{nA}^{total}(\vec{q}_{nA}; E_{nA})$ außerhalb der Massenschale ($E_{nA} \neq \vec{q}_{nA}^{\,2}/2\mu_{nA}$).

Denn unter Ausnutzen des optischen Theorems

$$\oint_{B^*} M_{nA,B^*}(\vec{q}_{nA}; E_{nA}) M^*_{nA,B^*}(\vec{q}'_{nA}; E_{nA}) \, \delta(E_{nA} - W_{B^*} + W_A) = -\frac{(2\pi)^3}{\pi} A.H. M_{nA,nA}(\vec{q}_{nA}, \vec{q}'_{nA}; E_{nA}), \tag{2.5}$$

wo über alle erreichbaren Kanäle B* summiert und integriert wird und "A.H." den antihermiteschen Anteil der Amplitude bezeichnet, und der Definition des off-shell totalen Wirkungsquerschnitts

$$\sigma_{nA}^{total}(\vec{q}_{nA}; E_{nA}) = -\frac{4\pi}{q_{nA}} \frac{\mu_{nA}}{2\pi} Im \, M_{nA,nA}(\vec{q}_{nA}, \vec{q}_{nA}; E_{nA}) \tag{2.6}$$

erhält man

$$\frac{d\sigma^P}{dE_{pB} d\Omega_{pB}} = \frac{\mu_{dA}\mu_{pB}}{(2\pi)^2} \frac{k_{pB}}{k_{dA}} \frac{|M_{d,pn}|^2}{|E_{nA} - \frac{q_{nA}^2}{2\mu_{nA}}|^2} (-1) \frac{1}{\pi} Im \, M_{nA,nA}(\vec{q}_{nA}, \vec{q}_{nA}; E_{nA}) \tag{2.7}$$

$$= \frac{\mu_{dA}\mu_{pB}}{(2\pi)^2} \frac{k_{pB}}{k_{dA}} \frac{|M_{d,pn}|^2}{|E_{nA} - \frac{q_{nA}^2}{2\mu_{nA}}|^2} \frac{q_{nA}}{2\pi\mu_{nA}} \sigma_{nA}^{total}(\vec{q}_{nA}; E_{nA}).$$

Eine zu (2.7) analoge Beziehung ist in anderem Zusammenhang auch von Chew und Low[39] und von Bell[40] angegeben worden.

Der Vergleich des (d,p)-Wirkungsquerschnitts für den Transfer eines Neutrons in einen Resonanzzustand mit dem totalen Neutron-Wirkungsquerschnitt am gleichen Target bedeutet

also in dieser Näherung einen Vergleich der elastischen Neutron-Streuamplitude in der Resonanz außerhalb und auf der Massenschale.

Dabei sind Lage und Breite der Resonanzen allein durch die Energieabhängigkeit der Streuamplitude bestimmt, genauer durch Real- und Imaginärteil ihrer Pole in der komplexen E-Ebene.

Die Impulsabhängigkeit und damit der Unterschied der Amplitude außerhalb und auf der Massenschale können sich nur äußern in Veränderungen der Höhe und Interferenzform der Resonanz.

Qualitativ lassen sich diese Änderungen in einem halbklassischen Modell einer sich innerhalb einer Drehimpulsbarriere ausbildenden Ein-Teilchen-Resonanz beschreiben. Das in der (d,p)-Reaktion transferierte Neutron hat wegen der negativen Deuteron-Bindungsenergie einen gegenüber dem on-shell Wert höheren Impuls. Damit kann es leichter als auf der Massenschale die Barriere durchdringen, so daß die Resonanzamplitude im Transferquerschnitt höher sein wird. Dieser Effekt wird deutlicher in höheren Partialwellen, d.h. für größeren Barrieren. Wir erwarten deshalb, daß Resonanzen, die durch größere transferierte Drehimpulse angeregt werden, relativ zu denen in kleineren Partialwellen im (d,p)-Wirkungsquerschnitt überhöht werden, wenn man mit dem totalen Wirkungsquerschnitt vergleicht[41,42].

Eine detaillierte Diskussion des off-shell Verhaltens der Streuamplitude wird Gegenstand des nächsten Kapitels sein.

Es sei betont, daß ein Vergleich des (d,p)- mit dem totalen Wirkungsquerschnitt im Rahmen des hier beschriebenen Modells nur sinnvoll sein kann für den Transfer in Resonanzzustände. Mit Sicherheit kann das Modell nicht die Unterschiede

im schwach energieabhängigen Untergrund der beiden Wirkungsquerschnitte beschreiben - eventuell abgesehen von breiten Potentialresonanzen -, da im Untergrund nicht gegen andere Reaktionsmechanismen, wie etwa den Aufbruch des Deuterons mit anschließender elastischer Streuung des Protons am Target, diskriminiert werden kann.

2.1.2 Berücksichtigung der Wechselwirkung in Ein- und Ausgangskanal

Für einen quantitativen Vergleich von Wirkungsquerschnitten ist die bisher betrachtete Polgraphennäherung nicht ausreichend. Denn aus der Analyse des Transfers in gebundene Zustände ist bekannt, daß die Wechselwirkung im Ein- und Ausgangskanal (Distorsion) einen nicht vernachlässigbaren Einfluß insbesondere auf den absoluten Wert des differentiellen Wirkungsquerschnittes hat.

Beschreiben wir diese Wechselwirkungen durch optische Potentiale, läßt sich die Reaktionsamplitude mit Distorsion, M^D, durch die in Fig. 2 abgebildeten Graphen darstellen.

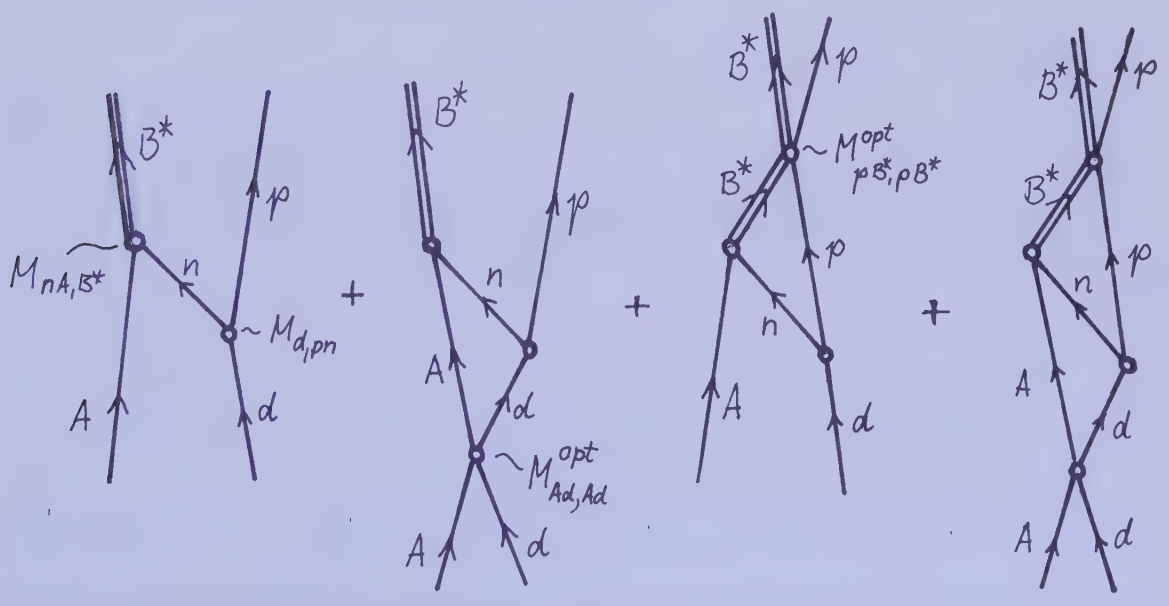


Fig. 2: Die Graphen zur Beschreibung des Transfers mit Wechselwirkung im Ein- und Ausgangskanal.

Die Doppellinien repräsentieren den Resonanzzustand. Die Vertexamplituden M^{opt} sind analog Gl. (2.3) mit den jeweiligen optischen Potentialen definiert. Dabei beschreiben wir der Einfachheit halber die Wechselwirkung im Ausgangskanal durch die optische Streuung des Protons am Gesamtsystem B^*. Zumindest für hinreichend schmale Resonanzen, d.h. langlebige Resonanzzustände B^* ist diese Näherung sinnvoll.

Konstruieren wir nach den Feynman'schen Regeln[25] die Amplitude der in Fig. 2 dargestellten Graphen aus den Vertexamplituden und den freien Propagatoren der virtuellen Teilchen und integrieren über die geschlossenen Linien, erhalten wir für die Amplitude M^D (vgl. [44], wo dieses Resultat für den Transfer in gebundene Zustände abgeleitet wurde)

$$M^D = \int d\vec{q}_{pB}\, d\vec{q}_{dA}\, \chi^{(-)*}_{\vec{k}_{pB}}(\vec{q}_{pB})\, \frac{M_{nA,B^*}(\vec{q}_{nA}; E_{nA})\, M_{d,pn}(\vec{q}_{pn}; \varepsilon_d)}{E_{nA} - \frac{q^2_{nA}}{2\mu_{nA}} + \frac{k^2_{pB}}{2\mu_{pB}} - \frac{q^2_{pB}}{2\mu_{pB}} + i\varepsilon}\, \chi^{(+)}_{\vec{k}_{dA}}(\vec{q}_{dA}) \,. \tag{2.8}$$

Hier sind

$$\chi^{(+)}_{\vec{k}}(\vec{q}) = \delta(\vec{k} - \vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2/2\mu - q^2/2\mu + i\varepsilon}\, M^{opt}(\vec{q}; k^2/2\mu) \tag{2.9a}$$

und

$$\chi^{(-)}_{\vec{k}}(\vec{q}) = \delta(\vec{k} - \vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2/2\mu - q^2/2\mu - i\varepsilon}\, M^{opt}(\vec{q}; k^2/2\mu) \tag{2.9b}$$

die Impulsdarstellungen der optischen Wellenfunktionen im Ein- und Ausgangskanal und die vier Terme des Produktes von (2.9a) und (2.9b) entsprechen den vier Graphen in Fig. 2.

Die Amplitude (2.8) ist also die Faltung der Polgraphenamplitude (2.1) mit den Fourier-Transformierten der optischen Wellenfunktionen. Dabei berücksichtigt der in Gl. (2.8) gegenüber (2.1) veränderte Pol-Nenner, daß der Polgraph jetzt i.a. Zustände außerhalb der Massenschale verbindet. Es gilt

$$E_{nA} - \frac{q_{nA}^2}{2\mu_{nA}} + \frac{k_{pB}^2}{2\mu_{pB}} - \frac{q_{pB}^2}{2\mu_{pB}} = -\varepsilon_d - \frac{q_{pn}^2}{2\mu_{pn}} + \frac{k_{dA}^2}{2\mu_{dA}} - \frac{q_{dA}^2}{2\mu_{dA}} , \tag{2.10}$$

$$\vec{q}_{nA} = \vec{q}_{dA} - \frac{\mu_A}{\mu_B}\vec{q}_{pB} , \quad \vec{q}_{pn} = \vec{q}_{pB} - \frac{\mu_p}{\mu_d}\vec{q}_{dA} . \tag{2.10a}$$

Berechnen wir mit der Amplitude (2.8) den differentiellen Wirkungsquerschnitt und integrieren über die nicht beobachteten Zustände B^*, so erhalten wir - wiederum unter Ausnutzen des optischen Theorems (2.5) -

$$\frac{d\sigma}{dE_{pB}\,d\Omega_{pB}}^{D} = \frac{\mu_{dA}\mu_{pB}}{(2\pi)^2}\frac{k_{pB}}{k_{dA}} \cdot \frac{(-1)}{\pi} \mathrm{Im} \int d\vec{q}\,'_{pB}\, d\vec{q}\,'_{dA}\, d\vec{q}_{pB}\, d\vec{q}_{dA}\; \tilde{M}^{*}_{\vec{k}_{pB},\vec{k}_{dA}}(\vec{q}\,'_{pB},\vec{q}\,'_{dA})\, M_{n_A,n_A}(\vec{q}\,'_{nA},\vec{q}_{nA};E_{nA})\, \tilde{M}_{\vec{k}_{pB},\vec{k}_{dA}}(\vec{q}_{pB},\vec{q}_{dA}) \tag{2.11}$$

mit

$$\tilde{M}_{\vec{k}_{pB}\vec{k}_{dA}}(\vec{q}_{pB},\vec{q}_{dA}) = \chi^{(-)*}_{\vec{k}_{pB}}(\vec{q}_{pB}) \frac{M_{d,pn}(\vec{q}_{pn};\varepsilon_d)}{E_{nA} - q_{nA}^2/2\mu_{nA} + k_{pB}^2/2\mu_{pA} - \vec{q}_{pB}^{\,2}/2\mu_{pB} + i\varepsilon}\, \chi^{(+)}_{\vec{k}_{dA}}(\vec{q}_{dA}) . \tag{2.12}$$

2.1.3 Berücksichtigung der Interferenz mit anderen Prozessen

Bisher haben wir nur die Beschreibung des einen Resonanz erzeugenden Reaktionsmechanismus diskutiert und die Möglichkeit der Interferenz dieses Mechanismus mit anderen Prozessen außer Acht gelassen. Diese Interferenzen beeinflussen aber sicherlich das beobachtbare Resonanzverhalten des (d,p)-Wirkungsquerschnitts.

Der einfachste nicht resonante Prozeß ist der in Fig. 3a dargestellte Proton-Transfer. "Nicht resonant" bedeutet hier, daß eventuell vorhandene Resonanzen im A+p System nicht nachgewiesen werden können. Denn wenn man nach der Reaktion nur das Proton beobachtet, entspricht dieses, da der Impuls des auslaufenden Neutrons unbekannt ist, einem breiten Spektrum übertragener Impulse und Energien, so daß die Resonanzen über einen weiten Bereich des gemessenen Wirkungsquerschnitts verwischt werden.

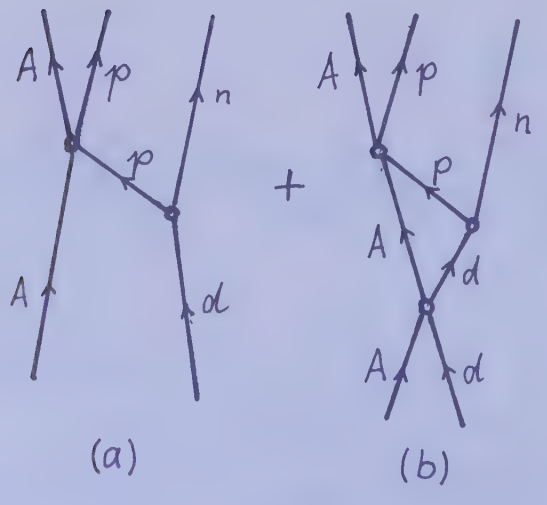


Fig. 3: Die Graphen für den Protontransfer (a) mit Wechselwirkung im Eingangskanal (b).

Im Sinne der Graphen-Theorie kann dieser einfachste auch als der dominante mit dem Neutron-Transfer kohärente Prozeß angesehen werden. Wir beschränken uns deshalb auf die Berücksichtigung der Interferenz der Amplitude M^D mit der Amplitude M^{PT} für den Proton-Transfer.

Subsummieren wir die Wechselwirkung des Protons mit dem Target und damit hier auch die Wechselwirkung im Endzustand wiederum in die optische Streuung des Protons am System B = n + A und berücksichtigen wir die Wechselwirkung im Eingangskanal durch Hinzunahme des Graphen Fig. 3(b), so erhalten wir für die Proton-Transfer-Amplitude

$$M^{PT} = \int d\vec{q}_{dA}\, M^{opt}_{pB,pB}(\vec{q}_{pB})\,\frac{k_{pB}^2}{2\mu_{pB}}\,\frac{1}{\frac{k_{pB}^2}{2\mu_{pB}} - \frac{q_{pB}^2}{2\mu_{pB}} + i\varepsilon}\, M_{d,pn}(\vec{q}_{pn};\varepsilon_d)\,\chi^{(+)}_{\vec{k}_{dA}}(\vec{q}_{dA}) \quad . \tag{2.13}$$

Nehmen wir für alle in (2.13) auftretenden optischen Potentiale reine Coulombpotentiale an, so beschreibt (2.13) den Coulomb-Aufbruch des Deuterons und unsere Näherung besteht nur darin, daß wir in $M_{pB,pB}^{opt}$ Masse und Impuls des Targets A durch die von B ersetzt haben.

Mit Hilfe der Lippmann-Schwinger-Gleichung (2.9) können wir (2.13) in einer (2.8) analogen Form schreiben als

$$M^{PT} = \int d\vec{q}_{pB}\, d\vec{q}_{dA} \left\{ \chi^{(-)*}_{\vec{k}_{pB}}(\vec{q}_{pB}) - \delta(\vec{k}_{pB} - \vec{q}_{pB}) \right\} (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_{nA} - \vec{q}_{nA})\, M_{d,pn}(\vec{q}_{pn};\varepsilon_d)\,\chi^{(+)}_{\vec{k}_{dA}}(\vec{q}_{dA}) \tag{2.14}$$

mit $k_{nA}^2 = 2\mu_{nA} E_{nA}$.

Dabei sorgt die Subtraktion der ebenen Welle aus der Proton-Wellenfunktion dafür, daß der physikalisch unmögliche Prozeß des Aufbruches des Deuterons, ohne daß eines seiner Bruchstücke anschließend eine Wechselwirkung erfährt, ausgeschlossen ist.

Demgegenüber subtrahiert Noble[5] aus der entsprechenden DWBA-Amplitude nur das Integral über die drei Deltafunktionen in (2.14), seine Amplitude enthält also noch den unphysikalischen Prozeß, daß das Deuteron am Target streut, wovon ja in der Näherung des optischen Potentials seine innere Struktur nicht berührt wird, und dann frei aufbricht.

Betrachten wir nun die Interferenz der Amplitude (2.14) mit der Amplitude (2.8) für den Neutronentransfer, so können beide nur interferieren, wenn der Resonanzzustand B^* in (2.8) in den Neutron-Target-Kanal zerfällt, (2.8) also die elastische Neutron-Streuamplitude $M_{n_A,n_A}(\vec{q}_{n_A};E_{n_A})$ ist. Wir erhalten damit für den (d,p)-Wirkungsquerschnitt in eine Resonanz B^*, wenn wir den Einfluß des Protonentransfers berücksichtigen,

$$\frac{d\sigma}{dE_{p_B}d\Omega_{p_B}}^{D+PT} = \frac{d\sigma}{dE_{p_B}d\Omega_{p_B}}^{D}$$

$$+\frac{\mu_{d_A}\mu_{p_B}}{(2\pi)^2}\frac{k_{p_B}}{k_{d_A}}\frac{1}{(2\pi)^3}2\mathrm{Re}\Big[\int d\vec{q}'_{p_B}\,d\vec{q}'_{d_A}\Big\{\chi^{(-)}_{\vec{k}_{p_B}}(\vec{q}'_{p_B})-\delta(\vec{k}_{p_B}-\vec{q}'_{p_B})\Big\}(2\pi)^3\delta(\vec{k}_{n_A}-\vec{q}_{n_A})$$

$$\cdot M^*_{d,pn}(\vec{q}'_{pn};\varepsilon_d)\,\chi^{(+)*}_{\vec{k}_{d_A}}(\vec{q}'_{d_A})\int d\vec{q}_{p_B}\,d\vec{q}_{d_A}\,\chi^{(-)*}_{\vec{k}_{p_B}}(\vec{q}_{p_B}) \qquad (2.15)$$

$$\frac{M_{n_A,n_A}(\vec{q}_{n_A};E_{n_A})\,M_{d,pn}(\vec{q}_{pn};\varepsilon_d)}{E_{n_A}-\frac{q^2_{n_A}}{2\mu_{n_A}}+\frac{k^2_{p_B}}{2\mu_{p_B}}-\frac{q^2_{p_B}}{2\mu_{p_B}}+i\varepsilon}\;\chi^{(+)}_{\vec{k}_{d_A}}(\vec{q}_{d_A})\Big]$$

$$+\frac{d\sigma}{dE_{p_B}d\Omega_{p_B}}^{PT},$$

wo der erste Term durch Gl. (2.11) gegeben ist und der letzte Term, der Wirkungsquerschnitt für den Protonentransfer, nichts zur Resonanz beiträgt.

Bei der bisherigen Betrachtung, insbesondere für die Lippmann-Schwinger-Gleichungen (2.9), haben wir stillschweigend angenommen, daß alle Wechselwirkungen hinreichend gut konvergieren (für $r \to \infty$ stärker als $1/r$), und damit die mit der "unendlichen Reichweite" des Coulombpotentials verbundenen Schwierigkeiten übergangen. Die exakte Behandlung des Coulombpotentials ändert aber nichts an den Ergebnissen. Es müssen nur die Deltafunktionen in Gln. (2.14,15) durch die Fouriertransformierten der "ungestreuten" Coulombwellen, die asymptotisch, abgesehen von der Vorwärtsrichtung, ebene Wellen mit logarithmischen Phasen sind, ersetzt werden. Die Herleitung unserer Resultate muß allerdings modifiziert werden. So erfüllen die Coulombfunktionen eine homogene Lippmann-Schwinger-Gleichung, es fehlen also die Deltafunktionen in Gln. (2.9). Dem entspricht aber, daß wegen der unendlichen Reichweite des Coulombpotentials im Ein- und Ausgangskanal immer eine Wechselwirkung vorhanden ist, die ersten drei Graphen in Fig. 2 also nicht auftreten. Auf eine detaillierte Behandlung des Coulombproblems soll hier verzichtet werden.

Insgesamt ist gezeigt worden, daß der (d,p)-Wirkungsquerschnitt in einer Resonanz auch unter Berücksichtigung von Distorsion und Interferenz mit nicht resonanten Prozessen linear durch die Neutron-Streuamplitude außerhalb der Massenschale parametrisiert werden kann.

Die praktische Berechnung des Wirkungsquerschnitts (2.15) und darin insbesondere die der Amplitude M^D (2.8) bereitet allerdings Schwierigkeiten. Denn in Gl. (2.8) muß ein sechs-dimensionales Integral ausgewertet werden, was numerisch sehr aufwendig ist, und sich auch durch Einführen der Null-Reichweite-Näherung für das Deuteron, womit der Deuteron-Vertex zu einer Konstanten wird, nicht wesentlich vereinfachen läßt.

Um dieses Problem zu umgehen, vernachlässigen wir im Pol-Nenner der Amplitude (2.8) den "Abstand des Protons von der Massenschale", $(q_{pB}^2 - k_{pB}^2)/2\mu_{pB}$,

$$M^D \approx \int d\vec{q}_{pB}\, d\vec{q}_{dA}\, \chi^{(-)*}_{\vec{k}_{pB}}(\vec{q}_{pB}) \frac{M_{nA,B^*}(\vec{q}_{nA}; E_{nA})\, M_{d,pn}(\vec{q}_{pn}; \varepsilon_d)}{E_{nA} - q_{nA}^2/2\mu_{nA} + i\varepsilon} \chi^{(+)}_{\vec{k}_{dA}}(\vec{q}_{dA}) \,. \qquad (2.8a)$$

In dieser Näherung ist der Neutron-Transfer-Wirkungsquerschnitt $d\sigma^D/dE_{pB}\, d\Omega_{pB}$ auch von Lipperheide[26] angegeben worden.

Die Amplitude (2.8a) hat die Struktur einer DWBA-Amplitude. Um dies näher ausführen zu können, diskutieren wir im nächsten Abschnitt die DWBA-Beschreibung der (d,p)-Reaktion in eine Resonanz und vergleichen das Resultat mit den hier gewonnenen in Abschnitt 2.3.

2.2. Die DWBA-Beschreibung der Reaktion

Zur Herleitung des DWBA-Wirkungsquerschnittes für den Neutron-Transfer in einen Resonanzzustand beschränken wir uns zunächst auf den Fall, daß im Neutron-Target-System nur elastische Streuung möglich ist. Die Problematik der Behandlung anderer Zerfallskanäle der Resonanz diskutieren wir am Ende dieses Abschnitts.

Wir setzen weiterhin voraus, daß die Neutron-Target-Wechselwirkung V_{nA} mit dem Gesamt- und dem Bahndrehimpuls des Neutrons vertauscht.

Die exakte Amplitude für die Reaktion A+d→A+p+n, d.h. mit drei Teilchen im Ausgangskanal, ist gegeben durch[44]

$$M = \langle \Psi_f^{(-)} \mid V_{nA} + V_{pA} - U_{dA} \mid \varphi_d \, \varphi_A \, \chi_{dA}^{(+)} \rangle . \qquad (2.16)$$

$\Psi_f^{(-)}$ ist der exakte Endzustand, $\chi_{dA}^{(+)}$ die optische Funktion im Eingangskanal, berechnet mit dem optischen Potential U_{dA} und φ_d und φ_A sind die inneren Wellenfunktionen von Deuteron und Target.

In DWBA-Näherung ersetzt man $\Psi_f^{(-)}$ analog dem Anfangszustand in (2.16) durch die optische Funktion $\chi_{pB}^{(-)}$ im Endkanal und den exakten Zustand $\psi_B^{(-)}$ des Neutron-Target-Systems B im Kontinuum,

$$M^{DW} = \langle \chi_{pB}^{(-)} \, \psi_B^{(-)} \mid V_{nA} + V_{pA} - U_{dA} \mid \varphi_d \, \varphi_A \, \chi_{dA}^{(+)} \rangle . \qquad (2.17)$$

Vernachlässigen wir noch die Wechselwirkungen $V_{pA} - U_{dA}$ in diesem Matrixelement, erhalten wir die übliche "prior"-Form der DWBA-Amplitude. Unter Benutzung der Identität

$$\varphi_d(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{q}_{pn} \, e^{i\vec{q}_{pn}\vec{r}} \, \frac{1}{-\varepsilon_d - \frac{q_{pn}^2}{2\mu_{pn}}} \, M_{d,pn}(\vec{q}_{pn}; E_d) \qquad (2.18)$$

und mit Gl. (2.10) ergibt sich, wenn wir wieder die Impulsdarstellungen benutzen,

$$M_{prior}^{DW} = \int d\vec{q}_{pB} \, d\vec{q}_{dA} \, \chi_{\vec{k}_{pB}}^{(-)*}(\vec{q}_{pB}) \cdot \frac{M_{nA,nA}(\vec{q}_{nA}; E_{nA}) \, M_{d,pn}(\vec{q}_{pn}; \varepsilon_d)}{E_{nA} - \frac{q_{nA}^2}{2\mu_{nA}} + \frac{1}{2\mu_{pB}}(k_{pB}^2 - q_{pB}^2) - \frac{1}{2\mu_{dA}}(k_{dA}^2 - q_{dA}^2) + i\varepsilon} \, \chi_{\vec{k}_{dA}}^{(+)}(\vec{q}_{dA}) . \qquad (2.19)$$

Diese DWBA-Amplitude unterscheidet sich von der Graphen-Amplitude (2.8) durch den Term $(k_{dA}^2 - q_{dA}^2)/2\mu_{dA}$ im Nenner. Ihre praktische Berechnung ist mit entsprechenden Schwierigkeiten verbunden wie die von (2.8).

Für den Transfer in gebundene Zustände benutzt man deshalb an Stelle der prior- die post-Form der Amplitude, die man erhält, wenn man anstatt von Gl.(2.17) vom Matrixelement der Wechselwirkungen im Ausgangskanal, $V_{pn} + V_{pA} - U_{pB}$, ausgeht und darin die Differenz $V_{pA} - U_{pB}$ vernachlässigt.

Im Gegensatz zur Situation bei gebundenen Zuständen B ist dieses Matrixelement für drei Teilchen im Endzustand nicht identisch mit (2.17), sondern divergent[4,45]. Deshalb kann die übliche Behandlung des Transfers in gebundene Zustände nicht direkt auf Resonanzzustände ausgedehnt werden.

Von Huby und Mines[4] ist aber gezeigt worden, daß, wenn man die in (2.17) auftretenden Kontinuumsfunktionen nach Partialwellen entwickelt, in den radialen Integralen die Wechselwirkungen im Eingangs- durch die im Ausgangskanal ersetzt werden können (vgl. auch [46]),

$$\langle \chi^{(-)}_{l_p} \psi^{(-)}_{Bl} \mid V_{nA} + V_{pA} - U_{dA} \mid \varphi_d \varphi_A \chi^{(+)}_{l_d} \rangle = \langle \chi^{(-)}_{l_p} \psi^{(-)}_{Bl} \mid V_{pn} + V_{pA} - U_{pB} \mid \varphi_d \varphi_A \chi^{(+)}_{l_d} \rangle . \tag{2.20}$$

Die Vernachlässigung von $V_{pA} - U_{pB}$ führt dann zu einer post-Form der DWBA-Amplitude, die sich wie im Fall gebundener Zustände B in Null-Reichweite-Näherung für das Deuteron einfach auswerten läßt. Setzen wir noch die Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$\langle \psi^{(-)}_{Bl} \mid \varphi_A \rangle = \psi^{(-)}_l(k_{nA}, r) = j_l(k_{nA} r) + \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^3} \int dq\, q^2 \, \frac{j_l(qr)\, M^+_l(q; E_{nA})}{E_{nA} - \frac{q^2}{2\mu_{nA}} - i\varepsilon} \tag{2.21}$$

in (2.20) ein, wo j_l eine mit r multiplizierte Besselfunk-

tion ist und die partielle Neutron-Target off-shell Streuamplitude durch

$$M_\ell(q;E_{nA}) = \int dr'\, \psi_\ell^{(-)*}(k_{nA},r')\, V_{nA}^{\ell}(r')\, j_\ell(qr') \tag{2.21a}$$

gegeben ist, erhalten wir

$$M_{post}^{DW} = \int d\vec{q}_{pB}\, d\vec{q}_{dA}\, \chi^{(-)*}_{\vec{k}_{pB}}(\vec{q}_{pB})\, \frac{M_{nA,nA}(\vec{q}_{nA};E_{nA})\, M_{d,pn}(\vec{q}_{pn};\varepsilon_d)}{E_{nA}-\frac{q_{nA}^2}{2\mu_{nA}}+i\varepsilon}\, \chi^{(+)}_{\vec{k}_{dA}}(\vec{q}_{dA}) \tag{2.22}$$

$$+ \,''\int''\, d\vec{q}_{pB}\, d\vec{q}_{dA}\, \chi^{(-)*}_{\vec{k}_{pB}}(\vec{q}_{pB})(2\pi)^3\delta(\vec{k}_{nA}-\vec{q}_{nA})\, M_{d,pn}(\vec{q}_{pn};\varepsilon_d)\, \chi^{(+)}_{\vec{k}_{dA}}(\vec{q}_{dA})$$

Hier bedeutet $''\int''$, daß die Integration innerhalb der Summation über die Partialwellen durchzuführen ist.

Der erste Term in (2.22) ist absolut konvergent, so daß Summation und Integration vertauschbar sind.

Soweit haben wir für die Neutron-Target-Wechselwirkung nur elastische Streuung zugelassen. Betrachten wir nun auch inelastische Zerfallskanäle des erreichten Resonanzzustandes B^*, d.h. die Reaktion $A+d\to A^*+p+n$, ändert sich an der Argumentation fast nichts. In Gl. (2.21) tritt dann wegen der Orthogonalität der Targetzustände die Besselfunktion nicht auf, und die elastische Amplitude M_ℓ muß durch die inelastische ersetzt werden,

$$\psi_\ell^{(-)}(k_{nA},r) = \frac{2}{\pi}\int dq\, q^2 j_\ell(qr)\, \frac{1}{E_{nA}-\frac{q^2}{2\mu_{nA}}-i\varepsilon}\, M^{+}_{\ell\, A,A^*}(q;E_{nA}). \tag{2.23}$$

Ebenso erscheint in (2.22) die inelastische Amplitude an Stelle von $M_{nA,nA}$ und der zweite Term tritt nicht auf.

Rearrangement-Kanäle, d.h. Reaktionen vom Typ A+d→p+B →p+a+b können innerhalb der DWBA nicht mehr in Strenge behandelt werden. Es liegt nach dem bisher Gesagten allerdings nahe, für den Neutron-Formfaktor $\langle \psi_B^{(-)} / \varphi_A \rangle$ wiederum Gl. (2.23) anzusetzen, wo M jetzt die off-shell Amplitude für die Reaktion n+A→a+b ist. Dieser Ansatz entspricht der Vernachlässigung der Tatsache, daß die Zerfallskanäle nicht orthogonal aufeinander sind.

In dieser Näherung ist also

$$M_{post}^{DW} = \int d\vec{q}_{pB}\, d\vec{q}_{dA}\, \chi^{(-)*}_{\vec{k}_{pB}}(\vec{q}_{pB}) \frac{M_{nA,B^*}(\vec{q}_{nA}; E_{nA})\, M_{d,pn}(\vec{q}_{pn}; \varepsilon_d)}{E_{nA} - \frac{q_{nA}^2}{2\mu_{nA}} + i\varepsilon} \chi^{(+)}_{\vec{k}_{dA}}(\vec{q}_{dA})$$

$$+ \delta_{nA,B^*} \int\!\!\!\!\int d\vec{q}_{pB}\, d\vec{q}_{dA}\, \chi^{(-)*}_{\vec{k}_{pB}}(\vec{q}_{pB})\, (2\pi)^3 \delta(\vec{k}_{nA} - \vec{q}_{nA})\, M_{d,pn}(\vec{q}_{pn}; \varepsilon_d)\, \chi^{(+)}_{\vec{k}_{dA}}(\vec{q}_{dA}) \qquad (2.24)$$

die DWBA-Amplitude für die (d,p)-Reaktion in eine Resonanz B^*, die in irgendeinen Kanal zerfällt, wo δ_{nA,B^*} bedeutet, daß der zweite Term nur auftritt für den elastischen Zerfallskanal.

2.3 Vergleich der Graphen-mit der DWBA-Amplitude

Vergleichen wir nun die DWBA-Amplitude (2.24) mit den Graphen-Amplituden (2.8) und (2.14). Der erste Term in (2.24) unterscheidet sich von der Neutron-Transfer-Amplitude (2.8) nur durch das Fehlen des Terms $(k_{pB}^2 - \vec{q}_{pB}^{\,2})/2\mu_{pB}$ im Nenner und ist identisch mit der Näherung (2.8a). Der zweite Term beschreibt wieder den Proton-Transfer, entspricht also der Amplitude (2.14). Offenbar ist das Vertauschen von Summation und Integration in (2.22) gleichbedeutend mit der Subtraktion der Deltafunktion in Gl. (2.14).

Die prior-Amplitude (2.19) kann den Proton-Transfer nicht enthalten, da die ihn in (2.17) allein ermöglichende Proton-Target-Wechselwirkung V_{pA} in (2.19) vernachlässigt worden ist.

Vergleichen wir deshalb nur den ersten Term der post-Amplitude (2.24) mit der prior-Form (2.19), so unterscheiden sich beide wiederum nur in dem Pol-Nenner.

Der Pol der Graphen-Amplitude (2.8) ist wegen der Identität (2.10) völlig symmetrisch bezüglich Ein- und Ausgangskanal. Dagegen weichen die Pol-Nenner der post- und prior-DWBA-Amplituden von dieser Symmetrie ab. Die prior-Form (2.19) vernachlässigt den Einfluß des Eingangskanals auf die Lage des Pols, was am deutlichsten wird, wenn man den Nenner in (2.19) als $(-\varepsilon_d - q_{pn}^2/2\mu_{pn})$ schreibt und mit dem Nenner der Graphen-Amplitude in der Form $[-\varepsilon_d - q_{pn}^2/2\mu_{pn} + (k_{dA}^2 - q_{dA}^2)/2\mu_{dA}]$ vergleicht. Analog wird in der post-Form (2.24) die Abhängigkeit des Pols vom Ausgangskanal vernachlässigt.

Die Frage nach der Relevanz dieser Unterschiede können wir hier nicht beantworten, da wir wegen des damit verbundenen erheblichen Aufwandes die exakte Graphen-Amplitude (2.8) ebenso wie die prior-Form (2.19) der DWBA-Amplitude nicht ausgewertet haben. Da die DWBA seit langem mit Erfolg zur Beschreibung von Transferreaktionen in gebundene Zustände benutzt wird, berechnen wir die Graphen-Amplitude in der Näherung (2.8a), identifizieren sie zusammen mit der Proton-Transfer-Amplitude (2.14) also mit der DWBA-Amplitude in der post-Form (2.24).

Trotz dieses Rückzugs auf die DWBA glauben wir, daß die durchgeführte Diskussion der Feynman-Graphen sinnvoll ist. Denn sie erlaubt eine physikalisch sehr durchsichtige Interpretation der verwendeten Amplitude für die (d,p)-Reaktion in einer Resonanz, sowohl, was die Behandlung der Zerfallskanäle der Resonanz, als auch, was die Interferenz des Neutron-Transfers mit anderen Prozessen betrifft.

Will man außerdem über die Näherung (2.8a) bzw. (2.24) hinausgehen, kann man die exakte Graphen-Amplitude (2.8) mit der wegen Gl. (2.20) ebenfalls noch bezüglich Ein- und Ausgangskanal symmetrischen DWBA-Amplitude (2.17) vergleichen, wo in Gl. (2.17) das Matrixelement als Integral innerhalb der Summation über die Partialwellen verstanden sein soll.

Die Berechnung von (2.17) an Stelle von (2.24), d.h. wegen (2.20) die Berücksichtigung von $V_{pA} - U_{pB}$, erfordert eine detaillierte Kenntnis der Proton-Target-Wechselwirkung V_{pA} , da es ja auf Unterschiede gegenüber dem optischen Potential U_{pB} , wo sich B von A nur durch ein Neutron unterscheidet, ankommt.

Dagegen stellt die Graphen-Amplitude (2.8) eine präzise definierte Verbesserung des DWBA-Ansatzes (2.24) - und analog auch eine Verbesserung von (2.19) - dar, die keine Kenntnis von V_{pA} verlangt.

2.4 Die detaillierte Form des differentiellen Wirkungsquerschnitts

Wir berücksichtigen jetzt explicit den Spin der an der Reaktion beteiligten Teilchen, beschränken uns allerdings auf den Fall, daß die optischen Potentiale keine Spin-Bahn-Kopplung enthalten. Deren Einbeziehung ist ohne weiteres möglich und ändert nichts wesentliches an unseren Überlegungen. Es sei daran erinnert, daß, solange wir die Null-Reichweite-Näherung für das Deuteron einsetzen, für den Ein-Teilchen-Transfer der übertragene Bahndrehimpuls auch bei Berücksichtigung von Spin-Bahn-Kopplung eine im Wirkungsquerschnitt inkohärent auftretende Quantenzahl ist.

Bilden wir mit der Amplitude (2.24), wo wir jetzt die Ortsdarstellung der Wellenfunktionen benutzen, den differentiellen Wirkungsquerschnitt, so ergibt sich, wenn das Target den Spin J_A hat und nur das auslaufende Proton nachgewiesen wird, in einer Resonanz mit dem Drehimpuls J_B

$$\frac{d\sigma}{dE_{pB}\,d\Omega_{pB}} = \frac{\mu_{pB}\mu_{dA}}{(2\pi)^2}\,\frac{k_{pB}}{k_{dA}}\,\frac{2J_B+1}{3(2J_A+1)}\,D_0^2$$

$$\cdot\,\frac{\mu_{nA}\,k_{nA}}{(2\pi)^3}\,(4\pi)^2\sum_{jl}\left\{\sigma_{jl}^{NT}+\sigma_{jl}^{PT\text{-}Jnt}+\sigma_{jl}^{PT}\right\} \tag{2.25}$$

mit

$$\sigma_{jl}^{NT} = -\,Jm\sum_m\Bigg[\sum_{l_d l_p l_d' l_p'}\Pi_{l_d' l_p'}^{l_m}(\theta)^{*}\,\Pi_{l_d l_p}^{l_m}(\theta)\int\frac{dr}{r}\int\frac{dr'}{r'}\,\chi_{l_p'}^{(-)}(k_{pB},\tfrac{\mu_A}{\mu_B}r)\,\chi_{l_d'}^{*}(k_{dA},r)$$

(2.25a)

$$\cdot\int dq\,q^2\int dq'q'^2\,\frac{j_l(qr)}{E_{nA}-\frac{q^2}{2\mu_{nA}}-i\varepsilon}\,(\tfrac{2}{\pi})^2\,\frac{1}{2\mu_{nA}k_{nA}}\,M_{jl}(q,q';E_{nA})\,\frac{j_l(q'r')}{E_{nA}-\frac{q'^2}{2\mu_{nA}}+i\varepsilon}\,\chi_{l_p}^{*}(k_{pB},\tfrac{\mu_A}{\mu_B}r')\,\chi_{l_d}(k_{dA},r')\Bigg],$$

$$\sigma_{jl}^{PT\text{-}Jnt} = 2\,Re\sum_m\Bigg[\sum_{l_p l_d}\Pi_{l_d l_p}^{l_m}(\theta)^{*}\int\chi_{l_p}(k_{pB},\tfrac{\mu_A}{\mu_B}r)\,j_l(k_{nA}r)\,\chi_{l_d}^{*}(k_{dA},r)\,\frac{dr}{r} \tag{2.25b}$$

$$\cdot\sum_{l_p' l_d'}\Pi_{l_d' l_p'}^{l_m}(\theta)\int\chi_{l_p'}^{*}(k_{pB},\tfrac{\mu_A}{\mu_B}r)\,\frac{2}{\pi}\int dq\,q^2\,\frac{j_l(qr)}{E_{nA}-\frac{q^2}{2\mu_{nA}}+i\varepsilon}\,M_{jl}(q;E_{nA})\,\chi_{l_d'}(k_{dA},r)\,\frac{dr}{r}\Bigg]$$

und

$$\sigma_{jl}^{PT} = \sum_m\left|\sum_{l_p l_d}\Pi_{l_d l_p}^{l_m}(\theta)\int\chi_{l_p}^{*}(k_{pB},\tfrac{\mu_A}{\mu_B}r)\,j_l(k_{nA}r)\,\chi_{l_d}(k_{dA},r)\,\frac{dr}{r}\right|^2. \tag{2.25c}$$

Diese Gleichungen gelten in Null-Reichweite-Näherung für das Deuteron,

$$V_{pn}(r_{pn})\,\varphi_d(\vec{r}_{pn}) = D_0\,\delta(\vec{r}_{pn}), \tag{2.26}$$

und die die Abhängigkeit vom Protonwinkel θ enthaltende Größe $\Pi(\theta)$ ist gegeben durch

$$\Pi_{l_d l_p}^{l_m}(\theta) = i^{l_d-l_p-l}(2l_p+1)\,\frac{(l_p-m)!}{(l_p+m)!}\begin{pmatrix}l_p & l & l_d\\ m & -m & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_p & l_d & l\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sqrt{4\pi}\,\frac{\mu_B}{\mu_A}\,P_{l_p}^{m}(\theta). \tag{2.27}$$

Für den Neutron-Transfer-Wirkungsquerschnitt $\sigma_{j\ell}^{NT}$, der dem Wirkungsquerschnitt $d\sigma^D/dE_{pB}\,d\Omega_{pB}$ in Gl. (2.15) entspricht, haben wir wiederum das optische Theorem benutzt, in der Partialwelle $j\ell$ also

$$-\frac{(2\pi)^3}{\pi}\,A.H.\,M_{j\ell}(q,q';E_{nA}) = (4\pi)^2\,\mu_{nA}\,k_{nA}\oint_{B^*} M^{*}_{j\ell\,nA,B^*}(q';E_{nA})\,M_{j\ell\,nA,B^*}(q;E_{nA}) \qquad (2.28)$$

Die Einzelheiten der Drehimpulskopplung in den Gln. (2.25) und (2.26) sind bei Satchler[1] angegeben, von dessen Konventionen wir nur dahingehend abweichen, daß die Streufunktionen gemäß

$$\chi^{(\pm)}(\vec{k},\vec{r}) = \frac{4\pi}{r}\sum_{\ell m} i^{\pm\ell}\,\chi_\ell(k,r)\,Y_\ell^{m*}(\hat{k})\,Y_\ell^{m}(\hat{r}) \qquad (2.29)$$

nach Partialwellen entwickelt werden, also gegenüber Satchler ein Faktor $1/k$ fehlt. $j_\ell(qr)$ bezeichnet damit wiederum eine mit r multiplizierte sphärische Besselfunktion.

Der Faktor $\mu_{nA}k_{nA}/(2\pi)^3$ in Gl. (2.25) ergibt sich aus der Integration über das unbeobachtete Neutron bzw. Zerfallsprodukt der Resonanz B , der Faktor $(4\pi)^2$ aus der (2.29) analogen Entwicklung der Neutron-Kontinuums-Funktion.

Der Wirkungsquerschnitt (2.25) entspricht genau dem in Ref.[1] für einen Zwei-Teilchen-Endkanal angegebenen und beschreibt auch den Transfer eines Neutrons in einen gebundenen Zustand, wenn man die dann physikalisch sinnlosen PT-Terme wegläßt. Denn für einen gebundenen Endzustand B mit der Energie E_B läßt sich die in (2.25a) auftretende Größe

$$M_{j\ell}^{B^*}(r,r') = \int dq\,q^2 \int dq'\,q'^2\,\frac{j_\ell(qr)}{E_{nA}-\frac{q^2}{2\mu_{nA}}-i\varepsilon}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\frac{1}{2\mu_{nA}k_{nA}}\,M_{j\ell}(q,q';E_{nA})\,\frac{j_\ell(q'r')}{E_{nA}-\frac{q'^2}{2\mu_{nA}}+i\varepsilon} \qquad (2.30)$$

schreiben als[26]

$$M_{j\ell}^{B(geb.)}(r,r') = \frac{\pi}{2\mu_{nA}k_{nA}}\,\varphi_{j\ell}^{B}(r)\,\varphi_{j\ell}^{B\,*}(r')\,\delta(E-E_B), \qquad (2.31)$$

wo φ_{jc}^{B} die Wellenfunktion des gebundenen Zustandes B ist.

Fassen wir das Ergebnis der Überlegungen dieses Kapitels noch einmal zusammen, so ist gezeigt worden, daß die Beschreibung des Neutron-Transfers als Ein-Stufen-Prozeß unter Berücksichtigung der Wechselwirkungen im Ein- und Ausgangskanal und der Interferenz mit kohärenten Prozessen die lineare Parametrisierung der Resonanzen im differentiellen (d,p)-Wirkungsquerschnitt durch die elastische Neutron-Target-Streuamplitude außerhalb der Massenschale ermöglicht. Dabei haben wir für den in der Neutron-Transferamplitude quadratischen Anteil des Wirkungsquerschnittes das optische Theorem ausgenutzt, während die Interferenz mit der Proton-Transferamplitude trivialerweise linear von der Neutron-Strauamplitude abhängt.

Die Beschreibung dieser off-shell-Streuamplitude im Rahmen der R-Matrix-Theorie der Kernreaktionen[35,36] enthält das folgende Kapitel. Ihre Behandlung im Schalenmodell der Kernreaktionen[37] wird im Anhang I kurz diskutiert.

3. R-Matrix-Theorie der off-shell-Streuamplitude

Zur Untersuchung der off-shell-Streuamplitude im Rahmen der R-Matrix-Theorie der Kernreaktionen[35,36] beschränken wir uns in Abschnitt 3.1, um die Durchführung durchsichtig zu halten, zunächst auf die Potentialstreuung.

Üblicherweise werden in der R-Matrix-Theorie Reaktionsamplituden bestimmt aus dem Verhalten der Wellenfunktion des Systems an den Kanalradien a_α, wobei nur Zwei-Teilchen-Kanäle betrachtet werden[35,36]. Dabei ist der Kanalradius a_α definiert als der Wert des Relativabstandes r_α der Fragmente im Kanal α, für den gilt, daß für alle Abstände $r_\alpha > a_\alpha$ die Wechselwirkung der Fragmente nur noch vom Abstand r_α abhängt, also für $r_\alpha > a_\alpha$ keine gegenseitige Polarisation oder Reaktion mehr auftritt.

Da ein solches Verfahren nur für on-shell-Amplituden anwendbar ist, formulieren wir die R-Matrix-Theorie in Abschnitt 3.1.1 und 2 in einer auch auf den Bereich außerhalb der Massenschale anwendbaren Weise und bestimmen daraus die off-shell-Streuamplitude in R-Matrix-Form.

In Abschnitt 3.1.3 betrachten wir den für die Anwendung interessierenden Fall einer isolierten Resonanz.

Die Verallgemeinerung der für die Potentialstreuung gewonnenen Ergebnisse auf allgemeine Kernreaktionen wird dann im zweiten Teil dieses Kapitels, 3.2, diskutiert.

Für den Spezialfall, daß außerhalb der Kanalradien überhaupt keine Wechselwirkungen auftreten, ist dies alles schon in Ref.[47] veröffentlicht worden. Wir führen hier die Diskussion noch einmal für den allgemeinen Fall durch, wo auch langreichweitige Potentiale berücksichtigt werden.

3.1 Potentialstreuung

3.1.1 Die off-shell-Amplitude für die Streuung an zwei Potentialen

Wir betrachten die Streuung eines Neutrons an der Summe zweier Potentiale

$$V(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{r}) \quad . \tag{3.1}$$

Dabei sei $V_1(\vec{r})$ ein langreichweitiges Potential, etwa vom Woods-Saxon Typ, das Anlaß höchstens zu breiten Resonanzen geben soll, während $V_2(\vec{r})$ auf den endlichen Bereich innerhalb des "Kanal"-Radius a beschränkt sein soll,

$$V_2(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } r \geq a \, , \tag{3.2}$$

und für die auftretenden schmalen Resonanzen verantwortlich sein soll.

Wir nehmen wiederum an, daß $V(\vec{r})$ mit dem Gesamt- und dem Bahndrehimpuls des gestreuten Neutrons vertauscht, j und ℓ also gute Quantenzahlen sind.

Dann ist die off-shell Streuamplitude in der Partialwelle j,ℓ per definitionem

$$\begin{aligned} M_{j\ell}(p,p';E) &= \int dr\, j_\ell(p'r)\, V_{j\ell}(r)\, j_\ell(pr) \\ &- \int dr \int dr'\, j_\ell(p'r)\, V_{j\ell}(r)\, G^{(+)}_{j\ell}(r,r';E)\, V_{j\ell}(r')\, j_\ell(pr') \, . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dabei ist das Potential $V_{j\ell}$ in dieser Partialwelle

$$V_{j\ell}(r) = \int d\hat{r} \sum_{m_\ell m_\ell' \nu \nu'} \begin{pmatrix} \ell & 1/2 \\ m_\ell & \nu \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} j \\ m_\ell + \nu \end{matrix} \Big) Y_\ell^{m_\ell *}(\hat{r})\, \chi^{\nu *}_{1/2}\, V(\vec{r})\, Y_\ell^{m_\ell'}(\hat{r})\, \chi^{\nu'}_{1/2} \begin{pmatrix} \ell & 1/2 \\ m_\ell' & \nu' \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} j \\ m_\ell' + \nu' \end{matrix} \Big) \tag{3.4}$$

mit $\hat{r} = \vec{r}/r$ und den Spin-Eigenfunktionen $\chi^{\nu}_{1/2}$.

Die Greensche Funktion $G^{(+)}_{j\ell}(r,r';E)$ erfüllt die inhomogene Schrödinger-Gleichung

$$\left(-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\ell(\ell+1)}{2\mu r^2}+V_{j\ell}(r)-E\right)G^{(+)}_{j\ell}(r,r';E) = \delta(r-r') \tag{3.5}$$

mit der rein auslaufenden Randbedingung

$$\left\{ r\frac{d}{dr}G^{(+)}_{j\ell}(r,r';E) - L_{j\ell}(k,r)\,G^{(+)}_{j\ell}(r,r';E)\right\}_{\substack{r\geq a\\ r>r'}} = 0 \,. \tag{3.6}$$

Dabei ist

$$L_{j\ell}(k,r) = r\frac{d}{dr}f_{j\ell}(k,r)\Big/ f_{j\ell}(k,r) \tag{3.7}$$

die logarithmische Ableitung der rein auslaufenden Lösung $f_{j\ell}(k,r)$ der Schrödinger-Gleichung

$$\left(-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\ell(\ell+1)}{2\mu r^2}+V_{j\ell}-E\right)f_{j\ell}(k,r) = 0 \tag{3.8}$$

mit

$$f_{j\ell}(k,r) \xrightarrow[r\to\infty]{} h_\ell(kr) \xrightarrow[r\to\infty]{} i^{-\ell-1}\,\frac{e^{ikr}}{r} \tag{3.8a}$$

und $k^2=2\mu E$.

j_ℓ und h_ℓ sind die sphärische Bessel- bzw. Hankelfunktion 1.Art, multipliziert mit r.

Im Folgenden unterdrücken wir die Indides j und ℓ.

Mit Hilfe der von Gell-Mann und Goldberger[48] angegebenen Methode zur Behandlung der Streuung an zwei Potentialen, die ohne weiteres auf den Bereich außerhalb der Massenschale erweitert werden kann, läßt sich die Streuung am Potential V_1 allein isolieren. Man erhält damit die off-shell-Verallgemeinerung der Gell-Mann-Goldberger-Formel für die Streuung an zwei Potentialen

$$M(p,p';E) = M_1(p,p';E) + \int_0^a \psi^{(-)*}(r;p',E)\, V_2(r)\, \psi^{(+)}(r;p,E)\, dr$$
$$- \int_0^a dr \int_0^a dr'\, \psi^{(-)*}(r;p',E)\, V_2(r)\, G^{(+)}(r,r';E)\, V_2(r')\, \psi^{(+)}(r;p,E). \tag{3.9}$$

Dabei sind die Amplitude M_1 und die darin auftretende Greensche Funktion $G_1^{(+)}$ definiert durch Gl. (3.3) bzw. (3.5) und (3.6), wo V durch V_1 zu ersetzen ist.

Die verallgemeinerten Wellenfunktionen $\psi^{(\pm)}$ sind gegeben durch

$$\psi^{(\pm)}(r;p,E) = j(pr) - \int G_1^{(+)}(r,r';E)\, V_1(r')\, j(pr')\, dr' \tag{3.10}$$

mit

$$\psi^{(-)*}(r;p,E) = \psi^{(+)}(r;p,E) \equiv \psi(r;p,E). \tag{3.11}$$

Sie sind Lösungen der inhomogenen Schrödinger-Gleichung

$$\left(-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{2\mu r^2} + V_1(r) - E\right)\psi(r;p,E) = \left(\frac{p^2}{2\mu} - E\right) j(pr), \tag{3.12}$$

können also nicht als Wellenfunktionen im physikalischen Sinne interpretiert werden.

3.1.2 Die R-Matrix-Form der off-shell-Streuamplitude

Die Resonanzstruktur der Amplitude (3.9) ist gegeben durch die Singularitäten der Greenschen Funktion $G^{(+)}(E)$ als Funktion der komplexen Variablen E. Die Real- und Imaginärteile der komplexen Pole im zweiten Blatt der Riemannschen Fläche bestimmen Lage und Breite der Resonanzen.

In der R-Matrix-Theorie dagegen beschreibt man die Resonanzen durch die reellen Pole einer ansonsten analytischen Lösung G(r,r';E) der Schrödinger Gl. (3.6) mit der reellen Randbedingung

$$\left\{ r\frac{d}{dr} G(r,r';E) - B(k)\, G(r,r';E) \right\}_{\substack{r=a \\ r>r'}} = 0, \tag{3.13}$$

wo B reell und evtl. energieabhängig ist. Die Spektraldarstellung dieser nur für r und r' $\leq$ a definierten Greenschen Funktion ist

$$G(r,r';E) = \sum_{\lambda} \frac{u_\lambda(r)\, u_\lambda(r')}{E_\lambda - E}, \tag{3.13a}$$

wo E_λ und $u_\lambda(r)$ die reellen Eigenwerte und -funktionen der Gleichung

$$\left(-\frac{1}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{2\mu r^2} + V(r) - E_\lambda \right) u_\lambda(r) = 0 \tag{3.14}$$

mit

$$\left\{ r\frac{d}{dr} u_\lambda(r) - B_\lambda u_\lambda(r) \right\}_{r=a} = 0 \tag{3.14a}$$

und

$$\int_0^a u_\lambda^2(r)\,dr = 1 \tag{3.14b}$$

sind. Die Resonanzen werden jetzt beschrieben durch die Energien E_λ und die Funktionswerte $u_\lambda(a)$. Da es sich um Lösungen der gleichen Differentialgleichung handelt, können wir mit Hilfe des Greenschen Theorems und Einsetzen der entsprechenden Randbedingungen die Greensche Funktion $G^{(+)}(r,r';E)$ durch die Funktion $G(r,r';E)$ ausdrücken und erhalten (immer für $r,r' \leq a$)

$$G^{(+)}(r,r';E) = G(r,r';E) + G(r,a;E)\left(1-\bar{\mathcal{L}}G(a,a;E)\right)^{-1}\bar{\mathcal{L}}G(a,r';E) \tag{3.15}$$

mit

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} - \mathcal{B} = \frac{1}{2\mu a}L(k,a) - \frac{1}{2\mu a}B(k). \tag{3.16}$$

Im Folgenden unterdrücken wir das Argument E in allen Greenschen Funktionen und benutzen die Abkürzung

$$G = G(a,a;E). \tag{3.17}$$

Durch Einsetzen von Gl. (3.15) erhalten wir so die Streuamplitude in R-Matrix-Form

$$M(p,p';E) = M_1(p,p';E) + \int_0^a dr\, \psi(r;p',E)\, V_2(r)\, \psi(r;p,E)$$
$$- \int_0^a dr \int_0^a dr'\, \psi(r;p',E)\, V_2(r)\, G(r,r')\, V_2(r')\, \psi(r';p,E)$$
$$- \int_0^a dr\, \psi(r;p',E)\, V_2(r)\, G(r,a)\, (1-\bar{L}G)^{-1}\bar{L} \int_0^a dr\, G(a,r)\, V_2(r)\, \psi(r;p,E) \qquad (3.18)$$

Wir sind jetzt in der Lage - was der wesentliche Punkt der R-Matrix-Theorie ist - die Wechselwirkung V_2 zu eliminieren. Denn wegen (3.5), (3.12), (3.13) und

$$\lim_{\substack{r\to a \\ r\le a}} r\frac{d}{dr} G(r,a) = \left(B(k) + 2\mu\right) G(a,a) \qquad (3.19)$$

gilt

$$A(r';p,E) \equiv \int_0^a dr\, \psi(r;p,E)\, V_2(r)\, G(r,r')$$
$$= \psi(r';p,E) - \left(\frac{1}{2\mu}\psi'(a;p,E) - \psi(a;p,E)\, B\right) G(a,r') \qquad (3.20)$$
$$+ \left(E - \frac{p^2}{2\mu}\right) \int_0^a dr\, j(pr)\, G(r,r') \,.$$

Definieren wir noch

$$W(p,E) = \frac{1}{2\mu}\psi'(a;p,E) - \psi(a;p,E)\, B, \qquad (3.21)$$

so erhalten wir endgültig für die Streuamplitude in R-Matrix-Form

$$M(p,p';E) = M_1(p,p';E) - W(p';E)\,\psi(a;p,E)$$

$$- (E-\tfrac{p'^2}{2\mu})\int_0^a dr\, j(p'r)\,\psi(a;p,E) - W(p';E)\,G\,W(p,E)$$

$$+ W(p';E)\int_0^a dr\, G(a,r)\,j(pr)\,(E-\tfrac{p^2}{2\mu}) + (E-\tfrac{p'^2}{2\mu})\int_0^a dr\, j(pr)\,G(r,a)\,W(p,E)$$

$$- (E-\tfrac{p'^2}{2\mu})\int_0^a dr\int_0^a dr'\, j(p'r)\,G(r,r')\,j(pr')\,(E-\tfrac{p^2}{2\mu}) \qquad (3.22)$$

$$- A(a;p';E)\,(1-\bar{\mathcal{L}}G)^{-1}\bar{\mathcal{L}}\,A(a;p,E)\,.$$

Wir stellen fest, daß damit auf der Energieschale, $(E-p^2/2\mu)=(E-p'^2/2\mu)=0$, wo die Integrale über den Innenraum in (3.22) nicht mehr auftreten, die Amplitude festgelegt ist durch die Parameter a,B(E) und die Funktion G = G(a,a), die im wesentlichen die R-Matrix - hier reduziert auf eine R-Funktion - ist,

$$G = G(a,a) = \frac{1}{2\mu a}\,R, \qquad (3.23)$$

wie sie bei Lane und Thomas[35] definiert wird.

3.1.3 Streuung in eine isolierte Resonanz

Die Streuung in eine isolierte Resonanz können wir nun dadurch beschreiben, daß wir in der R-Matrix-Greenschen Funktion G nur einen Pol explicit berücksichtigen und den Beitrag der übrigen Pole in dessen Nähe durch eine schwach energieabhängige, den Untergrund der Resonanz beschreibende Funktion G_0 ersetzen:

$$G(r,r') \cong G_\lambda(r,r') + G_0(r,r') \qquad (3.24)$$

mit

$$G_\lambda(r,r') = \frac{u_\lambda(r)\,u_\lambda(r')}{E_\lambda - E} \quad . \tag{3.24a}$$

Betrachten wir zunächst nur den letzten, in G nicht linearen Teil der rechten Seite von Gl. (3.22). Für A(a;p,E) (Gl. 3.20) können wir schreiben - wir lassen die Argumente weg, soweit keine Verwechslung möglich ist -

$$\begin{aligned} A(a;p,E) &= A_0 - W G_\lambda + (E - \tfrac{p^2}{2\mu}) \int_0^a dr\, j(pr)\, G_\lambda(r,a) \\ &= A_0 (1-\bar{\mathcal{Z}} G_0)^{-1} (1-\bar{\mathcal{Z}} G) + A_0 (1-\bar{\mathcal{Z}} G_0)^{-1} \bar{\mathcal{Z}} G_\lambda \\ &\quad - W G_\lambda + (E - \tfrac{p^2}{2\mu}) \int_0^a dr\, j(pr)\, G_\lambda(r,a) \,. \end{aligned} \tag{3.25}$$

A_o ist definiert durch Gl. (3.20) mit G ersetzt durch G_o. Die G_λ enthaltenden Terme in Gl. (3.25) können wir zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} & A_0 (1-\bar{\mathcal{Z}} G_0)^{-1} \bar{\mathcal{Z}} G_\lambda - W G_\lambda + (E - \tfrac{p^2}{2\mu}) \int_0^a dr\, j(pr)\, G_\lambda(r,a) \\ &= \Big\{ \psi \mathcal{Z} - \tfrac{1}{2\mu} \psi' + (E - \tfrac{p^2}{2\mu}) \int_0^a j(pr) \Big[G_0(r,a) \bar{\mathcal{Z}} + \frac{u_\lambda(r)}{u_\lambda(a)} (1 - G_0 \bar{\mathcal{Z}}) \Big] \Big\} \\ &\qquad \cdot (1 - G_0 \bar{\mathcal{Z}})^{-1} G_\lambda \,. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Definieren wir

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\lambda(p,E) &= \psi(a;p,E)\,\mathcal{Z} - \tfrac{1}{2\mu} \psi'(a;p,E) \\ &\quad + (E - \tfrac{p^2}{2\mu}) \int_0^a dr\, j(pr) \Big[G_0(r,a)\, \bar{\mathcal{Z}} + \frac{u_\lambda(r)}{u_\lambda(a)} (1 - G_0 \bar{\mathcal{Z}}) \Big] , \end{aligned} \tag{3.27}$$

so ergibt sich aus (3.25-27) für den letzten Term Gl. (3.22)

$$A(a;p'E)\,(1-\bar{\mathcal{L}}G)^{-1}\bar{\mathcal{L}}\,A(a;p,E)$$

$$= A_0\,(1-\bar{\mathcal{L}}G_0)^{-1}\bar{\mathcal{L}}\,A_0$$

$$-\left\{A_0(p')\,\bar{\mathcal{L}} - D_\lambda(p')\right\}(1-G_0\bar{\mathcal{L}})^{-1}G_\lambda\,(1-\bar{\mathcal{L}}G_0)^{-1}\left\{\bar{\mathcal{L}}A_0(p) - D_\lambda(p)\right\} \tag{3.28}$$

$$+ D_\lambda(p'E)\,(1-G_0\bar{\mathcal{L}})^{-1}G_\lambda\,(1-\bar{\mathcal{L}}G)^{-1}D_\lambda(p,E).$$

Stellen wir schließlich fest, daß

$$A_0(p')\,\bar{\mathcal{L}} - D_\lambda(p') = \psi\bar{\mathcal{L}} - WG_0\bar{\mathcal{L}} + (E-\tfrac{p'^2}{2\mu})\int_0^a dr\, j(p'r)\,G_0(r,a)\,\bar{\mathcal{L}}$$

$$-\psi\mathcal{L} + \tfrac{1}{2\mu}\psi' - (E-\tfrac{p'^2}{2\mu})\int_0^a dr\, j(p'r)\left[G_0(r,a)\,\bar{\mathcal{L}} + \frac{u_\lambda(r)}{u_\lambda(a)}(1-G_0\bar{\mathcal{L}})\right] \tag{3.29}$$

$$= \left\{W(p') - (E-\tfrac{p'^2}{2\mu})\int_0^a dr\, j(p'r)\,\frac{u_\lambda(r)}{u_\lambda(a)}\right\}(1-G_0\bar{\mathcal{L}})$$

gilt, so sehen wir, daß sich der mittlere Term in Gl. (3.28) gegen den in G_λ linearen Teil von Gl. (3.22) heraushebt. Wir erhalten also insgesamt für die Streuamplitude in der Nähe einer isolierten Resonanz

$$M(p,p';E) = M^{\text{Untergrund}}(p,p';E) - D_\lambda(p'E)\,(1-G_0\bar{\mathcal{L}})^{-1}G_\lambda(1-\bar{\mathcal{L}}G)^{-1}D_\lambda(p,E), \tag{3.30}$$

wobei $M^{\text{Untergrund}}(p,p';E)$ den schwach energieabhängigen Untergrund der Resonanz beschreibt, den wir erhalten, wenn wir in Gl. (3.22) G durch G_0 ersetzen. Der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (3.30) beschreibt die Resonanz. Setzen wir die explicite Form (3.24a) von G_λ ein,

$$(1-G_0\bar{\mathcal{L}})^{-1}G_\lambda\,(1-\bar{\mathcal{L}}G)^{-1} = (1-G_0\bar{\mathcal{L}})^{-1}\frac{-u_\lambda(a)u_\lambda(a)}{E-\bar{E}_\lambda + u_\lambda(a)\,\bar{\mathcal{L}}\,(1-G_0\bar{\mathcal{L}})^{-1}u_\lambda(a)}\,(1-\bar{\mathcal{L}}G_0)^{-1}, \tag{3.31}$$

ergibt sich

$$M(p,p';E) = M^{\text{Untergrund}}(p,p';E) + \frac{1}{4\mu k} F_\lambda(p';E) \frac{e^{2i\delta_0(E)}\,\Gamma_\lambda(E)}{E-E_\lambda-\Delta_\lambda(E)+\frac{i}{2}\Gamma_\lambda(E)} F_\lambda(p,E). \quad (3.32)$$

Hier sind $\delta_0(E)$ die Untergrund-Streuphase, $\Delta_\lambda(E)$ die Verschiebung der Resonanzenergie gegen E_λ, $\Gamma_\lambda(E)$ die Breite der Resonanz[35,36] (vgl. Abschnitt 3.2.2) und

$$F_\lambda(p,E) = D_\lambda(p,E)/D_\lambda(k,E) = -2i\mu k\, f(k,a)\, D_\lambda(p,E) \quad (3.33)$$

wo wir zur Berechnung von D(k,E) ausgenutzt haben, daß die Wronski-Determinante der Funktionen $\psi(r;k,E)$ und f(k,r) unabhängig von r den Wert $(ik)^{-1}$ hat.

Auf der Massenschale gilt $F_\lambda(k,E) = 1$.

Damit ist gezeigt, daß die off-shell-Resonanzamplitude die bekannte Breit-Wigner-Form hat. Ihre Impulsabhängigkeit faktorisiert in die Faktoren $F_\lambda(p,E)$ und $F_\lambda(p',E)$, mit denen die on-shell-Amplitude multipliziert wird.

3.2 Allgemeine Kernreaktionen

3.2.1 Die off-shell-Reaktionsamplitude

Die soweit für Potentialstreuung durchgeführte Betrachtung kann ohne Schwierigkeiten auf den Fall einer allgemeinen Kernreaktion verallgemeinert werden.

Bezeichnen wir mit α, β Zwei-Teilchen-Kanäle und mit $\vec{p}, \vec{p}'$ die Relativimpulse der beiden Fragmente in diesen Kanälen, so ist die partielle off-shell-Amplitude für die Reaktion $\alpha p \longrightarrow \beta p'$ gegeben durch

$$M_{\alpha\beta}(p,p';E) = \langle \beta p' | V_\beta | \alpha p \rangle$$

$$+ \langle \beta p' | V_\beta G^{(+)}(E) V_\alpha | \alpha p \rangle . \qquad (3.34)$$

Dabei ist die Wellenfunktion für die freie Bewegung der Fragmente im Kanal α gegeben durch

$$\langle \vec{x} | \alpha p \rangle = j_{\ell_\alpha}(p r_\alpha)\, i^{\ell_\alpha} Y_{\ell_\alpha m_\alpha}(\hat{r}_\alpha)\, \varphi_\alpha(\xi_\alpha) \equiv j_{\ell_\alpha}(p r_\alpha)\, \tilde{\varphi}_\alpha(\xi_\alpha, \hat{r}_\alpha) . \qquad (3.35)$$

Wir haben wiederum den Spin nicht berücksichtigt. $\vec{X}$ ist die Gesamtheit aller Koordinaten, $\vec{r}_\alpha$ der relative Abstand, $\varphi_\alpha(\xi_\alpha)$ das Produkt der inneren Wellenfunktionen der beiden Fragmente und V_α ihre Wechselwirkung, d.h. die Summe aller Nukleon-Nukleon-Wechselwirkungen, wo die wechselwirkenden Nukleonen sich in verschiedenen Fragmenten befinden.

Es sei bemerkt, daß im Bornschen Term der Amplitude (3.34) willkürlich die Wechselwirkung V_β eingesetzt worden ist. Es existiert auch die mit (3.34) außerhalb der Massenschale nicht identische Amplitude mit der Wechselwirkung V_α im Born-Term. Der Unterschied ist

$$\langle \beta p' | V_\beta - V_\alpha | \alpha p \rangle = \left(\varepsilon_\alpha + \frac{p^2}{2\mu_\alpha} - \varepsilon_\beta - \frac{p'^2}{2\mu_\beta} \right) \langle \beta p' | \alpha p \rangle \qquad (3.36)$$

und verschwindet, was wohlbekannt ist, auf der Massenschale. Außerhalb derselben muß aus dem Zusammenhang entschieden werden, welche Amplitude benötigt wird. Da der Born-Term nicht resonant ist, ist dieses Problem hier irrelevant.

Wir teilen die Wechselwirkungen V_α wiederum auf in einen langreichweitigen Potential-Anteil $V_{1\alpha}$ und eine kurzreichweitige Komponente $V_{2\alpha}$ mit $V_{2\alpha} = 0$ für $r_\alpha > a_\alpha$, wo a_α der Kanalradius im Kanal α ist.

Dann können wir die (3.6) analoge Randbedingung für die Greensche Funktion $G^{(+)}$ formulieren als

$$\int d\hat{r}_\alpha d\xi_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha^*(\hat{r}_\alpha, \xi_\alpha) \left\{ r_\alpha \frac{d}{dr_\alpha} G^{(+)}(\vec{x}, \vec{x}'; E) - L_\alpha(k_\alpha, r_\alpha) G^{(+)}(\vec{x}, \vec{x}'; E) \right\}_{\substack{r_\alpha \geq a_\alpha \\ r_\alpha > r_\alpha'}} = 0, \tag{3.37}$$

wo $L_\alpha(k_\alpha, r_\alpha)$ eine diagonale Matrix ist, deren Elemente die logarithmischen Ableitungen (3.7) der rein auslaufenden Streufunktionen $f_\alpha(k_\alpha, r_\alpha)$ im Kanal α sind. Außerdem gilt $E = \hbar^2 k_\alpha^2 / 2\mu_\alpha + \varepsilon_\alpha$, wo ε_α die Summe der Bindungsenergien der Fragmente im Kanal α ist.

3.2.2 Die off-shell Breit-Wigner-Formel für eine isolierte Resonanz

Wir führen nun wieder die R-Matrix-Greensche-Funktion $G(\vec{x}, \vec{x}'; E)$ ein, die die zu (3.13) analoge Randbedingung erfüllt.

Ihre Spektraldarstellung ist

$$G(\vec{x}, \vec{x}'; E) = \sum_\lambda \frac{\overline{X}_\lambda(\vec{x})\, \overline{X}_\lambda(\vec{x}')}{E_\lambda - E} \tag{3.38}$$

mit den "Compoundkern"-Eigenfunktionen $\overline{X}_\lambda$ mit reellen Eigenwerten E_λ , die die gleiche Randbedingung wie G erfüllen. Die Projektion von G auf die Kanal"oberflächen"

$$G_{\alpha\beta}(r_\alpha, r_\beta'; E) = \int d\hat{r}_\alpha d\xi_\alpha \int d\hat{r}_\beta' d\xi_\beta' \, \tilde{\varphi}_\alpha^*(\hat{r}_\alpha, \xi_\alpha)\, G(\vec{x}, \vec{x}'; E)\, \tilde{\varphi}_\beta(\hat{r}_\beta', \xi_\beta'), \tag{3.39}$$

genommen an den Kanalradien a_α ist im wesentlichen wieder die bei Lane und Thomas[35] definierte R-Matrix,

$$G_{\alpha\beta}(a_\alpha, a_\beta; E) = \sum_\lambda \frac{u_{\lambda\alpha}(a_\alpha)\, u_{\lambda\beta}(a_\beta)}{E_\lambda - E} = \sqrt{2\mu_\alpha a_\alpha}\, R_{\alpha\beta} \sqrt{2\mu_\beta a_\beta}, \qquad (3.40)$$

wo die Funktionen $u_{\lambda\alpha}$ die entsprechenden Projektionen der Compound-Funktionen $\underline{\bar{X}}_\lambda$ auf den Kanal α sind,

$$u_{\lambda\alpha}(r_\alpha) = \int d\hat{r}_\alpha\, d\xi_\alpha\, \tilde{\varphi}_\alpha^*(\hat{r}_\alpha, \xi_\alpha)\, \underline{\bar{X}}_\lambda(\vec{x}). \qquad (3.41)$$

Ihre Normierung ist der spektroskopische Faktor $S_{\lambda\alpha}$,

$$\int_0^{a_\alpha} u_{\lambda\alpha}(r_\alpha)^2\, dr_\alpha = S_{\lambda\alpha} \leq 1. \qquad (3.41a)$$

Die Berechnung der Strauamplitude in R-Matrix-Form vollzieht sich nun ganz analog der oben für die Potentialstreuung durchgeführten. In der Tat sind die entsprechenden Gleichungen in Abschnitt 3.1 so geschrieben, daß die auftretenden Größen direkt als Matrizen gelesen werden können.

Es sei deshalb hier nur das Ergebnis für die Reaktion in eine isolierte Resonanz, d.h. die Amplitude in der Ein-Pol-Näherung der Greenschen Funktion G angegeben. Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Untergrund-Matrix G_0 - und auch die durch den langreichweitigen Anteil der Wechselwirkung definierte Matrix G_1 - diagonal in den Kanalindices sei. Nichtdiagonale Terme würden zu Anteilen der Untergrundamplitude von direkten Reaktionen führen[35].

Die Amplitude zerfällt wiederum in einen schwach energieabhängigen Untergrund und einen Resonanzanteil,

$$M_{\alpha\beta}(p,p';E) = \overset{\text{Untergrund}}{M_{\alpha\beta}(p,p';E)} + M^{\lambda}_{\alpha\beta}(p,p';E)\,. \tag{3.42}$$

Letzterer ist gegeben durch

$$M^{\lambda}_{\alpha\beta}(p,p';E) = F^{\lambda}_{\beta}(p';E)\; M^{\lambda}_{\alpha\beta}(k_\alpha, k_\beta;E)\; F^{\lambda}_{\alpha}(p,E). \tag{3.43}$$

$M^{\lambda}_{\alpha\beta}(k_\alpha,k_\beta;E)$ ist die on-shell-Resonanz-Amplitude[35,36]

$$M^{\lambda}_{\alpha\beta}(k_\alpha,k_\beta;E) = \frac{e^{i\delta^0_\beta}}{\sqrt{4\mu_\beta k_\beta}} \frac{\Gamma^{1/2}_{\lambda\beta}\,\Gamma^{1/2}_{\lambda\alpha}}{E-(E_\lambda+\Delta_\lambda(E))+\frac{i}{2}\Gamma_\lambda(E)} \frac{e^{i\delta^0_\alpha}}{\sqrt{4\mu_\alpha k_\alpha}}\,, \tag{3.44}$$

die durch die Hintergrundphasen

$$\delta^0_\alpha = -\arg f_\alpha(k_\alpha,a_\alpha) - \arg\left(1-\bar{L}_\alpha G^0_\alpha\right) - \pi/2\,, \tag{3.45}$$

die Partialbreiten

$$\Gamma_{\lambda\alpha} = 2P_\alpha \left|1-\bar{L}_\alpha G^0_\alpha\right|^{-2} \gamma^2_{\lambda\alpha}(a_\alpha)\,\frac{1}{2\mu_\alpha a_\alpha} \tag{3.46}$$

mit

$$P_\alpha = \mathrm{Im}\, L_\alpha = \frac{a_\alpha}{k_\alpha \left|f_\alpha(k_\alpha,r_\alpha)\right|^2}\,, \tag{3.46a}$$

die totale Breite

$$\Gamma_\lambda = \sum_\alpha \Gamma_{\lambda\alpha} \tag{3.47}$$

und die Energieverschiebung

$$\Delta_\lambda = -\sum_\alpha Re\left[\bar{\mathcal{L}}_\alpha (1 - G^0_\alpha \bar{\mathcal{L}}_\alpha)^{-1}\right] u^2_{\lambda\alpha}(a_\alpha) \tag{3.48}$$

bestimmt ist.

Die die Impulsabhängigkeit beschreibenden Faktoren F^λ sind in Analogie zu Gln. (3.33, 3.27) gegeben durch

$$F^\lambda_\alpha(p,E) = -2i\mu_\alpha k_\alpha f_\alpha(k_\alpha,a_\alpha)\left\{\psi_\alpha(a_\alpha;p,E)\mathcal{L}_\alpha - \frac{1}{2\mu_\alpha}\psi'_\alpha(a_\alpha;p,E)\right.$$
$$\left. + \left(E-\varepsilon_\alpha-\frac{p^2}{2\mu_\alpha}\right)\int_0^a dr\, j_\alpha(pr)\left[\frac{u^0_{\lambda\alpha}(r)}{u^0_{\lambda\alpha}(a_\alpha)}(1-G^0_\alpha\bar{\mathcal{L}}_\alpha) + G^0_\alpha(r,a_\alpha)\bar{\mathcal{L}}_\alpha\right]\right\}. \tag{3.49}$$

Dabei haben wir die über den Innenraum auf 1 normierten Einteilchenfunktionen $u^0_{\lambda\alpha}(r)$ eingeführt,

$$u_{\lambda\alpha}(r) = S^{1/2}_{\lambda\alpha}\, u^0_{\lambda\alpha}(r), \quad \int_0^{a_\alpha} u^0_{\lambda\alpha}(r)^2\, dr = 1, \tag{3.50}$$

um zu verdeutlichen, daß die Impuls-Faktoren F^λ_α unabhängig von den spektroskopischen Faktoren $S_{\lambda\alpha}$ sind. Auf der Massenschale gilt natürlich

$$F^\lambda_\alpha(k_\alpha, E) = 1. \tag{3.51}$$

Wir stellen also fest, daß auch im Falle einer allgemeinen Kernreaktion die off-shell-Amplitude in einer isolierten Resonanz im wesentlichen gegeben ist durch die bekannte Breit-Wigner on-shell-Form. Die Abhängigkeit von den Impulsen p und p' im Ein- und Ausgangskanal ist enthalten in Faktoren F^λ (p) und F^λ (p'), die unabhängig sind von

spektroskopischen Faktoren. Diese Impuls-Faktoren sind komplexe Größen, so daß sich, wenn man die Massenschale verläßt, i.a. sowohl die Höhe als auch die Form der Resonanz ändern wird.

Außerdem sei noch einmal auf die bekannte Tatsache hingewiesen, daß die off-shell-Reaktionsamplitude nicht mehr allein durch asymptotische, im Sinne der R-Matrix-Theorie also am Kanalradius definierte Größen festgelegt ist. Zur Beschreibung des off-shell Verhaltens benötigen wir in Gl. (3.49) das Integral über den Innenraum.

4. Der Vergleich der Resonanzen im (d,p)- und im totalen Neutron-Wirkungsquerschnitt

Wir setzen nun die R-Matrix-Amplitude (3.42) in den (d,p)-Wirkungsquerschnitt (2.25) ein. Nehmen wir an, daß zur Resonanz nur eine Partialwelle j,ℓ des transferierten Neutrons beiträgt, erhalten wir für eine isolierte Resonanz

$$\frac{d\sigma}{dE_{pB}\,d\Omega_{pB}} = \frac{\mu_{pB}\mu_{dA}}{(2\pi)^2}\,\frac{k_{pB}}{k_{dA}}\,\frac{2J_B+1}{3(2J_A+1)}\,D_0^2\,\frac{\mu_{nA}k_{nA}}{(2\pi)^3}\,(4\pi)^2\,2\mu_{nA}k_{nA}$$

$$\cdot\sum_m\Big\{-\mathrm{Im}\Big[M^{\lambda}_{j\ell}(E_{nA})\sum_{\ell_d\ell_p}\Pi^{\ell m *}_{\ell_d\ell_p}(\theta)\int\chi_{\ell_p}\,\varphi^{\lambda(-)}_{j\ell}(k_{nA},r)\,\chi^{*}_{\ell_d}\,\frac{dr}{r}$$

$$\cdot\sum_{\ell_d\ell_p}\Pi^{\ell m}_{\ell_d\ell_p}(\theta)\int\chi^{*}_{\ell_p}\,\varphi^{\lambda(+)}_{j\ell}(k_{nA},r)\,\chi_{\ell_d}\,\frac{dr}{r}\Big] \qquad (4.1)$$

$$+\,2\,\mathrm{Re}\Big[M^{\lambda}_{j\ell}(E_{nA})\sum_{\ell_d\ell_p}\Pi^{\ell m *}_{\ell_d\ell_p}(\theta)\int\chi_{\ell_p}\,j_\ell(k_{nA}r)\,\chi^{*}_{\ell_d}\,\frac{dr}{r}\sum_{\ell'_d\ell'_p}\Pi^{\ell m}_{\ell'_d\ell'_p}(\theta)\int\chi^{*}_{\ell'_p}\,\varphi^{\lambda(+)}_{j\ell}(k_{nA},r)\,\chi_{\ell'_d}\,\frac{dr}{r}\Big]\Big\}$$

+ Untergrund,

wo wir die Argumente der optischen Funktionen unterdrückt haben.

Der "Untergrund" enthält den PT-Wirkungsquerschnitt (2.25c) sowie die mit $M^{\text{Untergrund}}$ aus Gl.(3.42) zusammenhängenden Anteile des Transfer- und des PT-Interferenz-Wirkungsquerschnittes (2.25a,b).

Gehen wir davon aus, daß die Parameter Γ, Δ, δ der on-shell-Resonanz-Amplitude $M^{\lambda}_{j\ell}(E)$ aus Messungen der elastischen Streuung oder des totalen Neutron-Wirkungsquerschnitts experimentell gegeben sind, müssen also die Resonanz-Formfaktoren

$$\varphi_{jl}^{\lambda(\pm)}(k_{nA},r) = \frac{1}{2\mu_{nA}k_{nA}} \frac{2}{\pi} \int dq\, q^2 j_l(qr) \frac{1}{E_{nA} - \frac{q^2}{2\mu_{nA}} \pm i\varepsilon} F_{jl}^{\lambda}(q;E_{nA}) \quad (4.2)$$

berechnet werden, um das Resonanzverhalten der (d,p)-Protonspektren mit dem des totalen Wirkungsquerschnitts vergleichen zu können.

Wir betrachten zunächst den Grenzfall verschwindender "Ein-Teilchen-Breite", $\mu_\lambda^0(a) \to 0$.

4.1 Pseudogebundener Resonanzzustand

Definieren wir die "Ein-Teilchen-Breite" $\Gamma_\lambda^{s.p.}$, in dem wir in (3.46) μ_λ durch μ_λ^0 ersetzen,

$$\Gamma_{\lambda\alpha}^{s.p.} = 2P_\alpha \left| 1 - \bar{\mathcal{L}}_\alpha G_{0\alpha} \right|^{-2} \mu_{\lambda\alpha}^{0\,2}(a) \frac{1}{2\mu_\alpha a_\alpha}, \quad (4.3)$$

läßt sich der Impulsfaktor $F_\alpha^\lambda(p,E)$ mit (3.45) schreiben als

$$F_\alpha^\lambda(p,E) = \Gamma_{\lambda\alpha}^{s.p.\,-1/2} e^{-i\delta_\alpha^0} \sqrt{4\mu_\alpha k_\alpha} \left(E - \varepsilon_\alpha - \frac{p^2}{2\mu_\alpha}\right) \int_0^{a_\alpha} dr\, j_\alpha(pr)\, \mu_{\lambda\alpha}^0(r)$$
$$- 2i\mu_\alpha k_\alpha f_\alpha(k_\alpha,a_\alpha) \left\{ \psi_\alpha(a_\alpha;p,E)\bar{\mathcal{L}}_\alpha - \frac{1}{2\mu_\alpha}\psi'(a_\alpha;p,E) + \left(E - \varepsilon_\alpha - \frac{p^2}{2\mu_\alpha}\right) \int_0^{a_\alpha} dr\, j_\alpha(pr)\, G_\alpha^0(r,a_\alpha) \bar{\mathcal{L}}_\alpha \right\} \quad (4.4)$$

Ist nun $\Gamma_{\lambda\alpha}^{s.p.} \ll 1$, gilt näherungsweise

$$F_\alpha^\lambda(p,E) \longrightarrow \left(E - \varepsilon_\alpha - \frac{p^2}{2\mu_\alpha}\right) \int_0^{a_\alpha} dr\, j_\alpha(pr)\, \mu_{\lambda\alpha}^0(r)\, e^{-i\delta_\alpha^0}\, \Gamma_{\lambda\alpha}^{s.p.\,-1/2} \sqrt{4\mu_\alpha k_\alpha}. \quad (4.5)$$

Einsetzen in (4.2) liefert dann wegen der Orthogonalität der Besselfunktionen

$$\varphi^{\lambda\,(+)}_{jl}(k_{\alpha}r) = \varphi^{\lambda\,(-)}_{jl}(k_{\alpha\alpha},r) \cong \frac{\sqrt{4\mu_{\alpha\alpha}k_{\alpha\alpha}}}{2\mu_{\alpha\alpha}k_{\alpha\alpha}}\, u^{0}_{jl}(r)\, e^{-i\delta^{0}_{jl}} \Gamma^{s.p.\,-1/2}_{\lambda jl}\, \theta(a-r) \qquad (4.6)$$

mit $\theta(x) = 0$ für $x < 0$, $\theta(x) = 1$ für $x > 0$.

Da die on-shell-Amplitude $\Gamma_{\lambda}^{1/2}$ quadratisch enthält, verschwindet im betrachteten Grenzfall in Gl. (4.1) der in φ^{λ} lineare PT-Interferenzterm. Außerdem, wenn wir die Breit-Wigner-Form über die Resonanz integrieren,

$$-\int dE\, \mathrm{Im}\, \frac{1}{E-(E_{\lambda}+\Delta_{\lambda})+\frac{i}{2}\Gamma_{\lambda}} = \pi, \qquad (4.7)$$

fällt beim Einsetzen von (4.6) in (4.1) die on-shell-Amplitude heraus, und es ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{p\beta}} = \frac{\mu_{p\beta}\mu_{dA}}{(2\pi)^2}\,\frac{k_{p\beta}}{k_{dA}}\,\frac{2J_{\beta}+1}{3(2J_{A}+1)}\, D_{0}^{2}\, S^{\lambda}_{jl} \qquad (4.8)$$

$$\cdot \left| \sum_{l_p l_d} T^{lm}_{l_d l_p}(\vartheta) \int \frac{dr}{r}\, \chi^{*}_{l_p}(k_{p\beta}, \tfrac{\mu_A}{\mu_{\alpha}} r)\, u^{0}_{jl}(r)\, \chi_{l_d}(k_{dA}, r) \right|^2 .$$

Gl. (4.8) entspricht genau dem Wirkungsquerschnitt für Stripping in gebundene Zustände[1], nur daß statt der über den ganzen Raum normierten gebundenen Funktion hier eine über das endliche Volumen $r \leq a$ normierte Funktion positiver Energie auftritt, die als pseudogebundener Zustand bezeichnet wird. Diese Näherung ist als einer der einfachsten Ansätze zur Beschreibung von Stripping in Resonanzzustände von Huby und Mitarbeitern[13-15] diskutiert worden. Wir betonen noch einmal, daß sie nur gerechtfertigt ist, wenn die Ein-Teilchen-Breite der Resonanz klein ist. Eine beobachtete kleine Breite, die ja auch durch einen kleinen spektroskopischen Faktor hervorgerufen werden kann, allein ist also kein Kriterium für die Verwendung eines pseudogebundenen Formfaktors.

Es sei darauf hingewiesen, daß Coester, Schlessinger und Payne[20,49] im Rahmen der Viel-Teilchen-Streutheorie für den Grenzfall, daß die Breite Γ klein gegenüber der Resonanzenergie E ist, ebenfalls eine "gebundene" Wellenfunktion für den Resonanzzustand abgeleitet haben.

Vergleichen wir nun eine solche Resonanz im (d,p)- mit der entsprechenden im totalen Wirkungsquerschnitt, sehen wir, daß der betrachtete Grenzfall ein extremes Beispiel für die Änderung des Interferenzverhaltens ist. Unabhängig von der Resonanzform auf der Massenschale erhält man in (d,p) im pseudogebundenen Grenzfall eine symmetrische Resonanz, die nicht mit dem Untergrund interferiert, und zwar weder mit dem Untergrund der Neutron-Target-Streuung noch mit dem kohärenten Proton-Transfer.

4.2 Bestimmung der Resonanz-Formfaktoren im allgemeinen Fall

Behandeln wir nun den allgemeinen Fall endlicher Ein-Teilchen-Breite. Wir unterdrücken wiederum die Indices j und ℓ. Setzen wir die explicite Form (3.49) der Impulsfaktoren F^λ in Gl. (4.2) ein, so ergibt sich

$$\varphi^{\lambda(\pm)}(k_{nA},r) = -\frac{2}{\pi}\int dq\, q^2 j(qr)\frac{1}{E_{nA}-\frac{q^2}{2\mu_{nA}}\pm i\varepsilon}\left\{\psi(a;q,E_{nA})\bar{\mathcal{L}}-\frac{1}{2\mu_{nA}}\psi'(a;q,E_{nA})\right\} i f(k_{nA},a) \tag{4.9}$$

$$- i f(k_{nA},a)\,\theta(a-r)\left[\frac{u_\lambda^0(r)}{u_\lambda^0(a)}\left(1-G^0\bar{\mathcal{L}}\right)+G^0(r,a)\bar{\mathcal{L}}\right].$$

Die Differenz dieser beiden Formfaktoren ist

$$\varphi^{\lambda(-)}(k_{nA},r)-\varphi^{\lambda(+)}(k_{nA},r) = 2i j(k_{nA},r), \tag{4.10}$$

denn unter dem Integral über q gilt

$$\left(E_{nA} - \frac{q^2}{2\mu_{nA}} - i\varepsilon\right)^{-1} - \left(E_{nA} - \frac{q^2}{2\mu_{nA}} + i\varepsilon\right)^{-1} = -2\pi i \frac{\mu_{nA}}{k_{nA}} \delta(q - k_{nA}). \qquad (4.10a)$$

Wir können uns also zunächst auf die Betrachtung von $\varphi^{\lambda(+)}(k_{nA}, r)$ beschränken. Setzen wir in die Fourier-Integrale in Gl. (4.9) die Definition (3.10) der Funktion $\psi(a; p, E)$ ein, erhalten wir die Lippmann-Schwinger-Gleichung für die Greensche Funktion $G_1^{(+)}$:

$$\int dq\, q^2 j(qr) \frac{1}{E_{nA} - \frac{q^2}{2\mu_{nA}} + i\varepsilon} \left\{ j(qa) - \int dr' j(qr') V_1(r') G_1^{(+)}(r', a) \right\}$$

$$= -\frac{\pi}{2} G_f^{(+)}(r, a) + \frac{\pi}{2} \int dr' G_f^{(+)}(r, r') V_1(r') G_1^{(+)}(r', a) \qquad (4.11)$$

$$= -\frac{\pi}{2} G_1^{(+)}(r, a) \,,$$

wo $G_f^{(+)}$ die freie, auslaufende Greensche Funktion ist. Damit können wir den Formfaktor schreiben als

$$\varphi^{\lambda(+)}(k_{nA}, r) = i f(k_{nA}, a) \left\{ G_1^{(+)}(r, a) \mathcal{L} - \frac{1}{2\mu_{nA}} \frac{\partial}{\partial a} G_1^{(+)}(r, a) \right\}$$

$$- i f(k_{nA}, a)\, \theta(a - r) \left[\frac{u_\lambda^\circ(r)}{u_\lambda^\circ(a)} (1 - G^\circ \mathcal{L}) + G^\circ(r, a) \mathcal{L} \right]. \qquad (4.12)$$

Hier verschwindet der erste Term wegen (3.37) für $r < a$ und der zweite Term wegen der Stufenfunktion $\theta(a-r)$ für $r > a$.

In Gl. (4.12) ist neben der Ein-Teilchen-Wellenfunktion $u_\lambda^\circ(r)$ insbesondere die Hintergrund-Greensche-Funktion G° nicht genau bekannt. In der Nähe einer schmalen Resonanz erfüllen aber $G^\circ(r,a)$ und $u_\lambda^\circ(r)$ ungefähr die gleiche Schrödingergleichung. Es ist deshalb eine sinnvolle Näherung,

wenn wir ihre radiale Abhängigkeit als gleich annehmen,

$$G^{\circ}(r,a)\, G^{\circ -1}(a,a) = u_{\lambda}^{\circ}(r) / u_{\lambda}^{\circ}(a). \tag{4.13}$$

Damit vereinfacht sich Gl. (4.12) zu

$$\varphi^{\lambda(+)}(k_{nA},r) = i f(k_{nA},a)\left\{ G_1^{(+)}(r,a)\, \overleftarrow{\mathcal{L}} - \frac{1}{2\mu_{nA}} \frac{d}{da} G_1^{(+)}(r,a) \right\}$$

$$- i f(k_{nA},a)\, \theta(a-r)\, \frac{u_{\lambda}^{\circ}(r)}{u_{\lambda}^{\circ}(a)} \tag{4.14}$$

und mit der expliten Form

$$G_1^{(+)}(r,a) = 2i\mu_{nA} k_{nA}\, \psi(r_<; k_{nA}, E)\, f(k_{nA}, r_>) \tag{4.15}$$

der Greenschen Funktion $G_1^{(+)}$ endlich zu

$$\varphi^{\lambda(+)}(k_{nA},r) = - i f(k_{nA},a)\, \frac{u_{\lambda}^{\circ}(r)}{u_{\lambda}^{\circ}(a)} \qquad \text{für } r < a \tag{4.16a}$$

und

$$\varphi^{\lambda(+)}(k_{nA},r) = - i f(k_{nA},r) \qquad \text{für } r > a\ . \tag{4.16b}$$

Der Resonanz-Formfaktor ist also im Innenraum, r<a, i.w. durch die R-Matrix-Eigenfunktion $u_{\lambda}^{\circ}(r)$ und im Außenraum, r > a, durch die rein auslaufende Potentialstreufunktion $f(k_{nA},r)$ gegeben. Für die Funktion $\varphi^{\lambda(-)}$ gilt entsprechend

$$\varphi^{\lambda(-)}(k_{nA},r) = -i\left\{ f(k_{nA},a)\, \frac{u_{\lambda}^{\circ}(r)}{u_{\lambda}^{\circ}(a)} - 2 j(k_{nA} r) \right\} \quad \text{für } r<a \tag{4.17a}$$

und

$$\varphi^{\lambda(-)}(k_{nA},r) = -i\left\{f(k_{nA},r) - 2j(k_{nA}r)\right\} \quad \text{für } r>a. \qquad (4.17b)$$

$\varphi^{\lambda(-)}$ ist also asymptotisch rein einlaufend.

4.3 Berechnung der Ein-Teilchen-Funktion $u^{\circ}_{\lambda}(r)$

Die Streufunktion $f(k_{nA},r)$ im Außenraum $r \geq a$ kann durch ein Woods-Saxon-Potential hinreichend gut beschrieben werden. Dann ist die einzige Unbekannte in (4.17) die Ein-Teilchen-Funktion $u^{\circ}_{\lambda}(r)$. Da sie nur für einen relativ kleinen Bereich der Neutronkoordinate benötigt wird - typische Kanalradien sind von der Größenordnung einiger fm -, der durch die Absorption in den optischen Wellenfunktionen noch unterdrückt wird, und überdies ihr absoluter Wert nicht in den Formfaktor eingeht, wird der Transfer-Wirkungsquerschnitt nicht kritisch von $u^{\circ}_{\lambda}(r)$ abhängen.

Man kann sich deshalb auf ein einfaches Modell für die Berechnung von u°_{λ} beschränken.

Wir verfahren analog der Separationsenergie-Methode, die man üblicherweise beim Transfer in gebundene Zustände benutzt[2,3]. Dort berechnet man Modellwellenfunktionen für den zu untersuchenden Zustand als Lösung zu einem Woods-Saxon-Potential mit vorgegebener Geometrie. Dessen Tiefe wird so variiert, daß der Energie-Eigenwert der gesuchten Wellenfunktion mit der experimentell beobachteten Separationsenergie übereinstimmt, die Wellenfunktion also die geforderte Randbedingung für $r \to \infty$ erfüllt. Die Ein-Teilchen-Funktion $u^{\circ}_{\lambda}(r)$ muß die Randbedingung (3.14a) er-

füllen, wo die Größe $B(k)$ wiederum mit der Verschiebung Δ_λ (Gl. 3.48) des Eigenwertes von u_λ° gegen die beobachtete Resonanzenergie zusammenhängt.

Wir berechnen u_λ° als Lösung zu einem Ein-Teilchen-Potential - etwa einem Woods-Saxon-Potential - deren Energie-Eigenwert mit der beobachteten Resonanzenergie übereinstimmen soll. Bei vorgegebenen Geometrie-Parametern des Potentials muß dessen Tiefe dann konsistenterweise so bestimmt werden, daß die Energieverschiebung Δ_λ zumindest näherungsweise verschwindet. Wir fordern deshalb

$$Re\,\bar{\mathcal{L}} - \frac{1}{2\mu_{nA}}\left[Re\,\mathcal{L} - \frac{a u_\lambda^{\circ\prime}(a)}{u_\lambda^\circ(a)}\right] = 0, \tag{4.18}$$

womit Δ_λ in einer Ein-Kanal- und strengen Ein-Niveau- ($G^\circ = 0$) Näherung verschwindet.

4.4 Vergleich der Wirkungsquerschnitte in symmetrischen Resonanzen

Nachdem somit die Neutron-Formfaktoren bekannt sind, kann das Resonanzverhalten des (d,p)-Wirkungsquerschnitts mit dem des totalen Neutron-Wirkungsquerschnitts verglichen werden. Dieser Vergleich ist besonders einfach für Resonanzen, die auf der Massenschale symmetrisch sind, d.h. $\delta^\circ = 0$. Dieser Fall soll hier näher diskutiert werden.

Der totale Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Neutrons am Target A mit Spin J_A in eine Resonanz λ mit Spin J_B in der Partialwelle j,ℓ ist gegeben durch

$$\sigma_{j\ell}^{total}(E_{nA}) = -\frac{\mu_{nA}}{2\pi k_{nA}} \frac{2J_B+1}{2(2J_A+1)} (4\pi)^2\, Im\, M_{j\ell}^{\lambda}(E_{nA}) . \tag{4.19}$$

Integrieren wir in (4.1) und (4.19) über die Resonanz, so verschwinden alle Terme, die den Realteil der on-shell Amplitude enthalten,

$$\int dE \; \mathrm{Re}\, M_{jl}^{\lambda}(E) = 0 \quad \text{für } \delta^{\circ} = 0 \,, \tag{4.20}$$

und es ergibt sich für den Quotienten der Wirkungsquerschnitte

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{pB}} \Big/ \bar{\sigma}_{jl}^{\,\text{total}} = \frac{\mu_{pB}\mu_{dA}}{(2\pi)^2}\,\frac{2}{3}\,D_0^2\,\frac{2\mu_{nA}k_{nA}^3}{(2\pi)^3}$$

$$\cdot \sum_m \Big\{ \mathrm{Re}\Big[\sum_{l_p' l_d'} \Pi_{l_d' l_p'}^{lm\,*}(\theta) \int \chi_{l_p'}^{(-)} \varphi_{jl}^{\lambda(-)}(k_{nA}, r)\, \chi_{l_d'}^{*}\, \frac{dr}{r} \sum_{l_p l_d} \Pi_{l_d l_p}^{lm}(\theta) \int \chi_{l_p}^{*}\, \varphi_{jl}^{\lambda(+)}(k_{nA}, r)\, \chi_{l_d}\, \frac{dr}{r} \Big] \tag{4.21}$$

$$+ 2\,\mathrm{Im}\Big[\sum_{l_p l_d} \Pi_{l_d l_p}^{lm\,*}(\theta) \int \chi_{l_p}\, j_l(k_{nA} r)\, \chi_{l_d}^{*}\, \frac{dr}{r} \sum_{l_p' l_d'} \Pi_{l_d' l_p'}^{lm}(\theta) \int \chi_{l_p}^{*}\, \varphi_{jl}^{\lambda(+)}(k_{nA}, r)\, \chi_{l_d}\, \frac{dr}{r} \Big] \Big\} .$$

Dieser Quotient zeigt eine charakteristische Abhängigkeit vom transferierten Drehimpuls, wie wir an Hand der Anwendungen im nächsten Kapitel demonstrieren werden.

Als eine der Ursachen dafür können wir hier bereits, neben der schon in Kapitel 2.1 qualitativ beschriebenen Drehimpulsabhängigkeit der off-shell-Neutron-Streuamplitude, die die höheren Drehimpulse bevorzugt, den Einfluß der optischen Wellenfunktionen anführen.

Diese unterdrücken wegen der Absorption in den optischen Potentialen die Neutron-Wellenfunktion für kleine Argumente r. Da für größere Drehimpulse der Schwerpunkt der Wellenfunktion weiter außen, d.h. bei größeren Werten von r liegt, werden dadurch wiederum die höheren Drehimpulse relativ verstärkt.

Bevor wir uns im nächsten Kapitel dem Vergleich des (d,p)- und des totalen Neutron-Wirkungsquerschnitts für die Targetkerne ^{15}N und ^{24}Mg zuwenden, geben wir noch eine für die numerische Auswertung besonders geeignete Schreibweise von Gl. (4.21) an. Dazu schreiben wir die Real- und Imaginärteile in (4.22) als Summe oder Differenz von Betragsquadraten, so daß sich der Quotient der Wirkungsquerschnitte darstellen läßt in Termen, die jeder in der Struktur dem Wirkungsquerschnitt für Transfer in gebundene Zustände gleichen, nur daß die gebundene Wellenfunktion durch eine Kontinuumsfunktion ersetzt worden ist. Es gilt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{pB}}\Big/\overline{\sigma}_{jl}^{\text{total}} = \frac{\mu_{pB}\mu_{dA}}{(2\pi)^2}\,\frac{k_{pB}}{k_{dA}}\,\frac{2}{3}D_0^2\,\frac{2\mu_{nA}k_{nA}^3}{(2\pi)^3}\left\{\sigma_{jl}^{(R)} - \sigma_{jl}^{(J)} - \sigma_{jl}^{\text{PT-Int.}}\right\} \tag{4.22}$$

mit

$$\sigma_{jl}^{(R)} = \sum_m \left| \sum_{l_p l_d} \Pi_{l_d l_p}^{lm}(\theta) \int \chi_{l_p}^{*} \left(\mathrm{Re}\,\varphi_{jl}^{\lambda(+)}(k_{nA}r) + i\, j_l(k_{nA}r) \right) \chi_{l_d} \frac{dr}{r} \right|^2, \tag{4.23}$$

$$\sigma_{jl}^{(J)} = \sum_m \left| \sum_{l_p l_d} \Pi_{l_d l_p}^{lm}(\theta) \int \chi_{l_p}^{*} \left(j_l(k_{nA}r) - \mathrm{Im}\,\varphi_{jl}^{\lambda(+)}(k_{nA}r) \right) \chi_{l_d} \frac{dr}{r} \right|^2 \tag{4.24}$$

und

$$\begin{aligned}\sigma_{jl}^{\text{PT-Int.}} = &\sum_m \left| \sum_{l_p l_d} \Pi_{l_d l_p}^{lm}(\theta) \int \chi_{l_p}^{*}\, j_l(k_{nA}r)\, \chi_{l_d} \frac{dr}{r} \right|^2 \\ &+ \sum_m \left| \sum_{l_p l_d} \Pi_{l_d l_p}^{lm}(\theta) \int \chi_{l_p}^{*}\, \varphi_{jl}^{\lambda(+)}(k_{nA}r)\, \chi_{l_d} \frac{dr}{r} \right|^2 \\ &- \sum_m \left| \sum_{l_p l_d} \Pi_{l_d l_p}^{lm}(\theta) \int \chi_{l_p}^{*} \left(\varphi_{jl}^{\lambda(+)}(k_{nA}r) + i\, j_l(k_{nA}r) \right) \chi_{l_d} \frac{dr}{r} \right|^2 .\end{aligned} \tag{4.25}$$

In Gleichung (4.22) wird in den meisten Fällen der erste Term, $\sigma_{j\ell}^{(R)}$, den Hauptbeitrag liefern. Denn vergleichen wir ihn mit $\sigma_{j\ell}^{(J)}$, so stellen wir fest, daß wegen Gl. (4.16b) die Neutronwellenfunktion in (4.23) asymptotisch eine Hankelfunktion (multipliziert mit r) ist, während der Formfaktor in (4.24) für große Argumente r in dem Maße verschwindet, wie das Potential V_1 zu Null geht, so daß das Matrixelement in (4.23) i.a. einen sehr viel größeren Wert als das in (4.24) haben wird.

Ebenso kann man davon ausgehen, daß die Interferenz mit dem Proton-Transfer, $\sigma_{j\ell}^{PT-Int}$, gegenüber dem Neutron-Transfer-Querschnitt $\sigma_{j\ell}^{(R)} - \sigma_{j\ell}^{(J)}$ in der Regel eine untergeordnete Rolle spielt.

5. Anwendungen

5.1 Das numerisch behandelte Modell

Es ist gezeigt worden, daß das unterschiedliche Resonanzverhalten des Transfer- und des totalen Neutron-Wirkungsquerschnitts im Rahmen der hier entwickelten Theorie im wesentlichen durch kinematische, d.h. von der Struktur der Resonanz unabhängige Größen beschrieben wird. Die Impulsfaktoren F^{λ} bzw. die daraus gewonnenen Resonanz-Formfaktoren $\varphi^{\lambda(\pm)}$ enthalten an Information über die Resonanzstruktur nur die radiale Abhängigkeit der Ein-Teilchen-Funktion $u_{\lambda}^{(0)}$ für Werte von r kleiner als der Kanalradius a.

Um zu untersuchen, ob die Theorie in der Lage ist, die beobachteten Änderungen der Höhe und Form von Resonanzen beim Verlassen der Massenschale zu beschreiben, erscheint es deshalb gerechtfertigt, zunächst ein möglichst einfaches Modell zur Beschreibung der Neutron-Target-Wechselwirkung zu benutzen.

Wir vernachlässigen die Komponente der Wechselwirkung außerhalb des Kanalradius, setzen also

$$V(r) \equiv 0 \qquad \text{für } r > a. \tag{5.1}$$

Damit sind die Resonanzwellenfunktionen φ^{λ} im Außenraum gegeben durch sphärische Hankelfunktionen

$$\varphi_{\ell}^{\lambda(\pm)}(k_{nA}, r) = \mp i\, h_{\ell}^{(\pm)}(k_{nA} r) \qquad \text{für } r > a. \tag{5.2}$$

Insbesondere verschwindet der Formfaktor in Gl. (4.24) identisch für $r > a$, so daß sich das Integral nur über den Bereich $r < a$ erstreckt. Damit ergibt sich für für die unten verwendeten Kanalradien gegenüber $\sigma_{j\ell}^{(R)}$ ein

Unterschied von drei Größenordnungen, so daß der Beitrag von $\sigma_{jl}^{(J)}$ zu Gl. (4.22) vernachlässigt werden kann,

$$\sigma_{jl}^{(J)} \approx 0 \,. \tag{5.3}$$

Für die Berechnung der Ein-Teilchen-Wellenfunktion approximieren wir die Wechselwirkung V durch ein spinunabhängiges Kastenpotential mit einem Radius $b < a$,

$$V(r) = -V_0\,\theta(b-r) \,. \tag{5.4}$$

Die Tiefe des Potentials, V_o, ist durch die Randbedingung (4.18) festgelegt. Damit sind die verbleibenden freien Parameter der Kanalradius a und der Potentialradius b.

Der Einfluß dieser sehr groben Näherung für die Wechselwirkung V im Innenraum auf die Ergebnisse ist, wie schon erwähnt, wegen der Absorption in den optischen Wellenfunktionen unkritisch.

Eine Verbesserung unserer Resultate ist also in erster Linie von einer realistischeren Beschreibung der langreichweitigen Wechselwirkungskomponente V_1 zu erwarten. Rechnungen mit einem Woods-Saxons-Potential, das diese Komponente sicherlich adäquat wiedergeben kann, sind allerdings noch nicht durchgeführt worden.

Die Wechselwirkung in Ein- und Ausgangskanal wird durch optische Potentiale mit Spin-Bahn-Kopplung beschrieben.

5.2 Berechnung der radialen Integrale

Die in Gl. (4.22) auftretenden Integrale konvergieren außerordentlich schwach. Das asymptotische Verhalten der Integranden ist (vgl. (5.2))

$$\chi^{*}_{\ell_p}\,\varphi^{\lambda(\pm)}_{\ell}\,\chi_{\ell_d} \xrightarrow{r\to\infty} \sim \frac{\sin\left(k_{pa}\frac{M_a}{M_0}r+\delta_p\right)e^{\pm i k_{na}r}\sin\left(k_{da}r+\delta_d\right)}{r} \qquad (5.5)$$

Das Problem der numerischen Auswertung dieser Integrale ist in der Literatur ausführlich diskutiert worden[4,18], wo das eleganteste Verfahren zu ihrer Berechnung von Vincent und Fortune[18] angegeben worden ist und auch von uns benutzt wird:

Man integriert zunächst von r=0 bis zu einer Stelle r=R, wo man die optische Wellenfunktion durch eine Linearkombination von ein- und auslaufenden Coulomb-Funktionen und die Neutronfunktion durch eine Hankel-Funktion ersetzen kann. Damit ist für $r \geqslant R$ der Integrand als analytische Funktion gegeben. Mit Benutzung des Cauchy'schen Hauptsatzes integriert man dann statt von R nach ∞ von R nach $R \pm i\infty$, wo der Integrand so aufgeteilt wird, daß er auf den entsprechenden Wegen exponentiell konvergiert und die Integrale zuverlässig berechenbar sind. Einzelheiten des Verfahrens und die Formeln für die Coulomb-Funktionen bei komplexen Argumenten r sind in Anhang II zusammengestellt worden.

Diese Modifikation der radialen Integration und die oben definierten Resonanz-Formfaktoren wurden in das DWBA-Programm DWUCK[50] eingearbeitet. Mit dessen Hilfe wurde der Quotient der zu vergleichenden Wirkungsquerschnitte (4.22-25) berechnet, wobei die üblichen Korrekturen für Nichtlokalität und finite-range Effekte berücksichtigt wurden[50].

5.3 Vergleich von $^{15}N(d,p)$ und $^{15}N(n,total)$

In Fig. 4 sind die gemessenen Proton-Spektren aus der (d,p)-Reaktion bei E_d = 12 MeV[42,43,51] und der totale Neutron-Wirkungsquerschnitt[52] für den Targetkern ^{15}N einander gegenübergestellt worden. Die in das untere Spektrum eingezeichnete durchgezogene Linie ist das Ergebnis einer R-Matrix-Rechnung[52].

Vergleichen wir die Spektren miteinander, stellen wir eine bemerkenswerte Parallelität fest. Zwar ändert sich der schwach energieabhängige Untergrund wesentlich. Der langsam mit der Energie abfallende s-Wellen-Untergrund des totalen Wirkungsquerschnitts kurz oberhalb der Schwelle ist in dem (d,p)-Querschnitt nicht zusehen während dort die breite $d_{3/2}$-Ein-Teilchen-Resonanz um $E_n \cong 2.8$ MeV deutlich hervortritt.

Aber beide Spektren zeigen große Ähnlichkeit bezüglich der schmalen Resonanzen, so z.B. sogar die gleiche Interferenzstruktur bei E_x = 5.048 MeV. Die Höhe der Resonanzen relativ zueinander ändert sich allerdings zum Teil drastisch - man vergleiche etwa die Resonanzen bei E_x = 3.519 MeV und 3.957 MeV oder bei 5.13 MeV und 5.226 MeV, wo E_x die Anregungsenergie in ^{16}N ist. Dieses Verhalten soll erklärt werden.

In Fig. 5a ist die Resonanz bei E_x = 5.730 MeV im totalen Querschnitt und bei verschiedenen Proton-Winkeln in (d,p) dargestellt.Auf dieses Beispiel einer auf der Massenschale unsymmetrischen Resonanz werden wir im Abschnitt 5.3.3 zurückkommen. Vorerst beschränken wir uns auf die Betrachtung der symmetrischen Fälle, wo die Untergrundphase δ_o in etwa verschwindet.

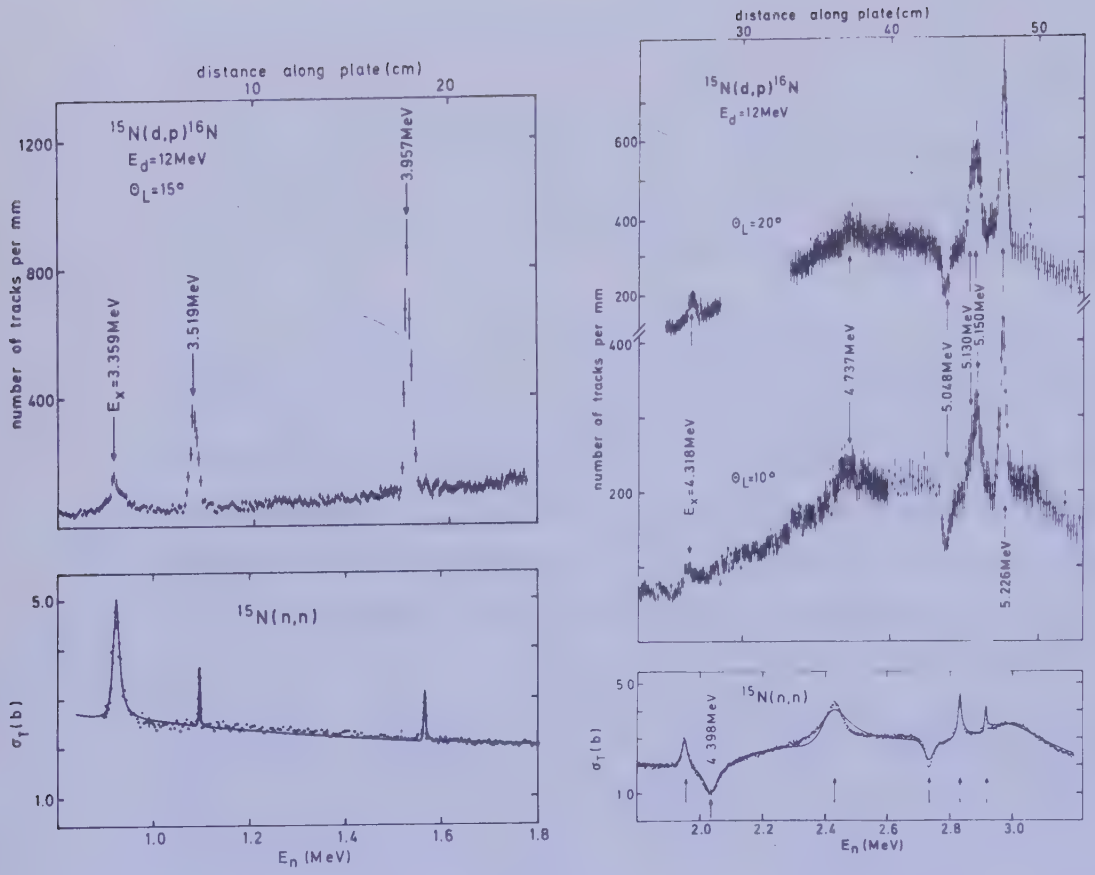
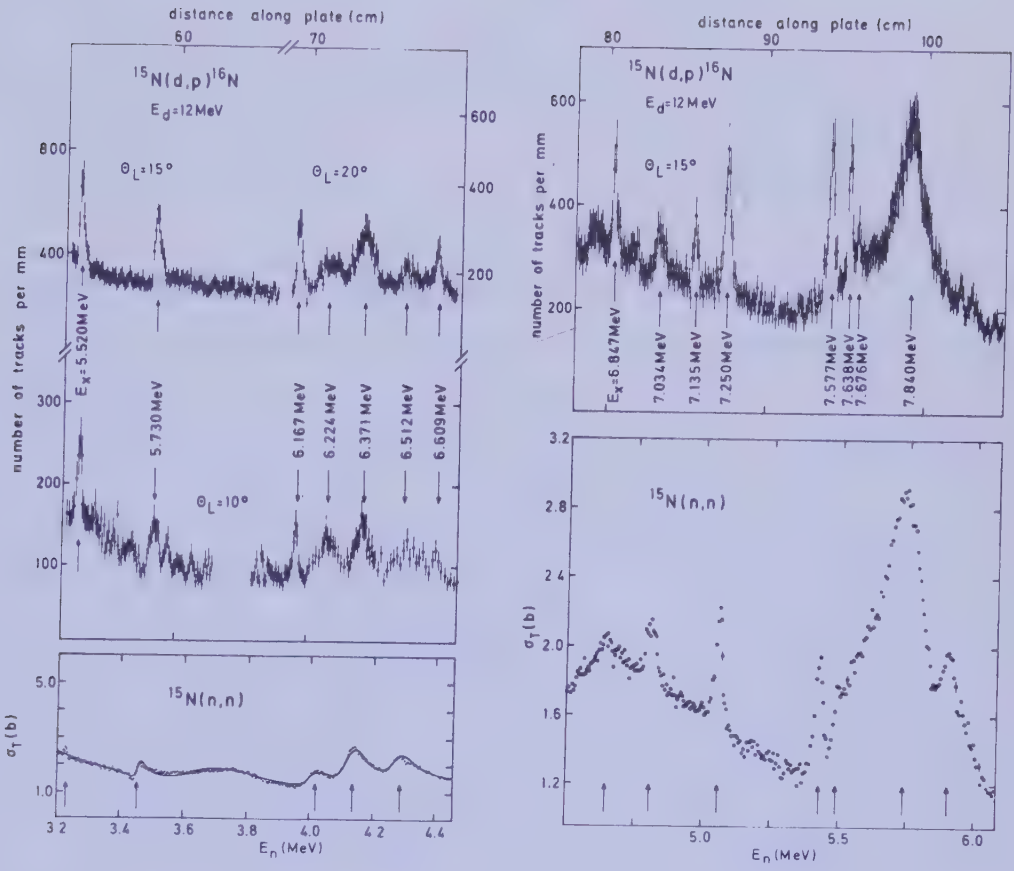


Fig. 4: Die Protonenspektren aus der (d,p)-Reaktion bei E_d = 12 MeV[42,43,51] und der totale Neutron-



Wirkungsquerschnitt[52] für den Targetkern ^{15}N.

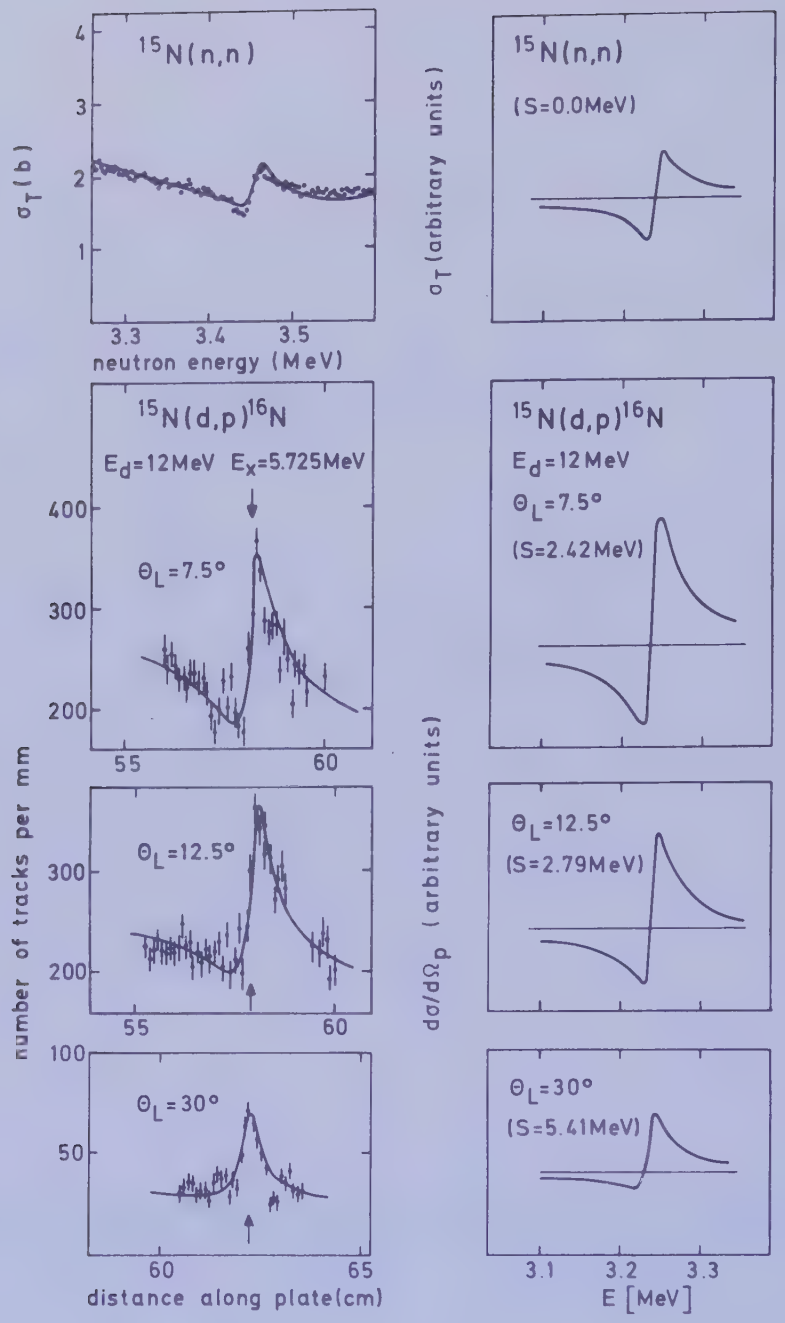


Fig. 5: Die Interferenzstruktur bei E_x = 5.73 MeV in ^{16}N auf und außerhalb der Massenschale. a) Die experimentellen Spektren bei verschiedenen Proton-Winkeln θ_L [43], und der totale Wirkungsquerschnitt [52]; b) die Ergebnisse der Theorie in der Pol-Graphen-Näherung (5.7) mit ℓ=1, Γ_λ = 0.024 MeV, δ_o = $-\pi/4$.

5.3.1 Die verwendeten Parameterwerte

Den in der Rechnung verwendeten Wert des Kanalradius, a = 4.69 fm, haben wir Ref.[52] entnommen. Mit diesem Wert wurde der in Fig. 4 gezeigte R-Matrix-Fit an den gemessenen totalen Wirkungsquerschnitt erzielt. Für den Radius des Kastenpotentials V haben wir b = 2.8 fm benutzt.

Die berechneten Wirkungsquerschnitte erwiesen sich als relativ unempfindlich auf die Variation dieser beiden Radiusparameter. Änderungen des Kanalradius um $\Delta a = \pm 1$ fm und des Potentialradius b um $\Delta b = \pm 0.3$ fm führen zu keinen relevanten Verschiebungen der Ergebnisse. Die Parameter der optischen Potentiale im Ein- und Ausgangskanal sind der Literatur entnommen.

Da uns für die betrachtete Deuteron-Energie keine optischen Potentiale für die Streuung am ^{15}N bekannt sind, wurde im Eingangskanal das von Bohne[53] für die Streuung am ^{16}O diskutierte Potential benutzt. Das Protonen-Potential im Ausgangskanal ist der Arbeit von Rosen et al.[54] entnommen.

Die Parameter der optischen Potentiale sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Die Nomenklatur entspricht der von Ref.[50].

Tabelle 1: Parameter der optischen Potentiale*

Kanal	V_o	r_o	a	W	r'_o	a'	V_{so}	r_c	Ref.
$^{15}N + d$	-100	1.0	0.916	45.2[a]	1.76	0.504	-6.0	1.3	53)
$^{16}N + p$	-53.8+0.33 E_{PB}	1.25	0.65	30 [a]	1.25	0.7	-5.5	1.3	54)
$^{24}Mg + d$	-96	1.4	0.7	-12.3[b]	1.4	0.7	-6.0	1.2	60)
$^{25}Mg + p$	-53.8+0.33 E_{PB}	1.25	0.65	30 [a]	1.25	0.7	-5.5	1.2	64)

* Alle Werte sind in MeV bzw. fm angegeben.

a) Oberflächenpotential, b) Volumenpotential

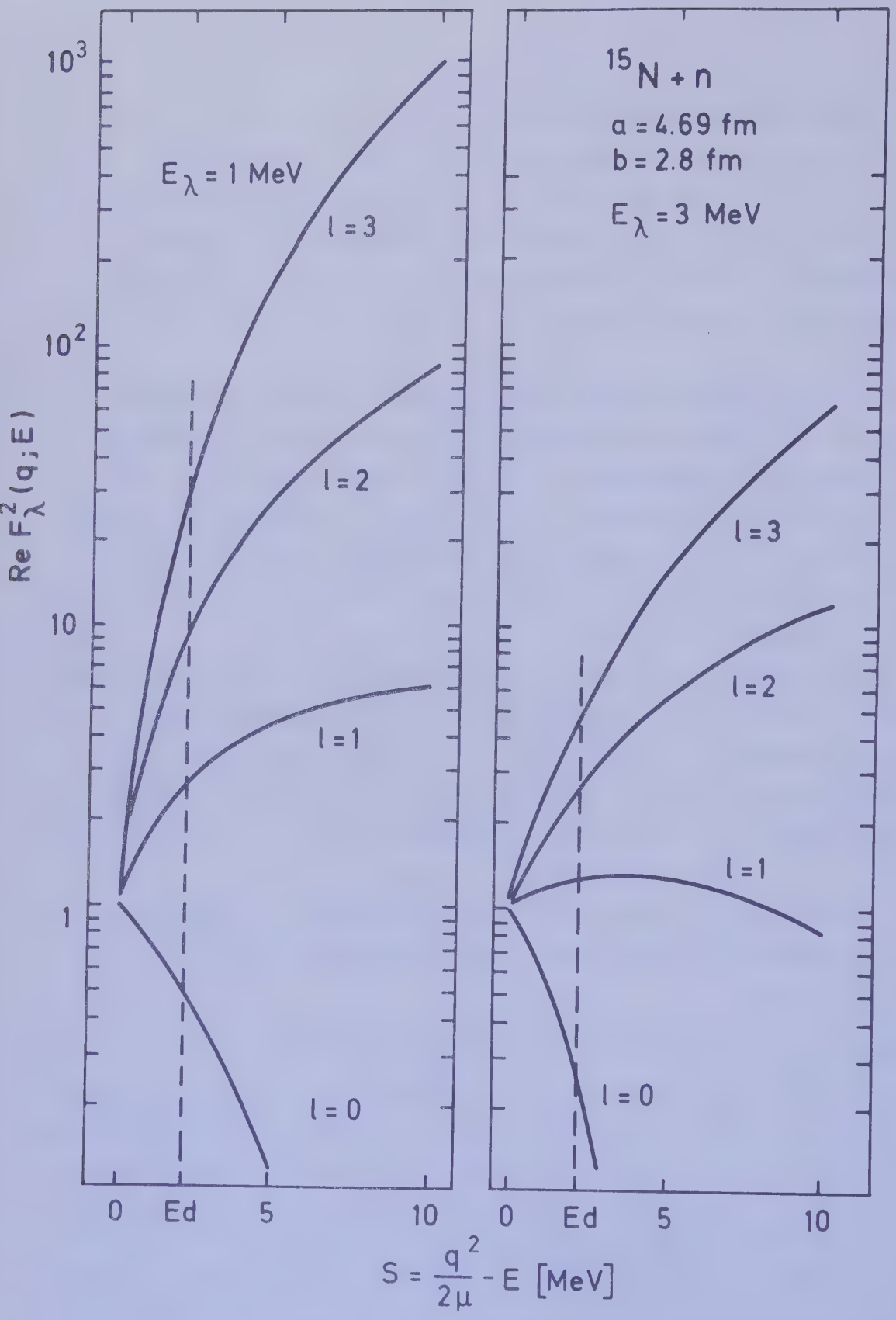


Fig. 6: Die Größe Re $F_\lambda^2(q,E)$ als Funktion des Abstandes $s = \frac{q^2}{2\mu} - E$ von der Massenschale für die Resonanzenergien E_λ = 1 und 3 MeV.

5.3.2 Die Drehimpulsabhängigkeit der off-shell-Streuamplitude und der Einfluß des Proton-Transfers

Zur Demonstration der bereits in Abschnitt 2.1 erwähnten Drehimpulsabhängigkeit der off-shell Streuamplitude betrachten wir zunächst die Pol-Graphen-Näherung, vernachlässigen also die Wechselwirkung in Ein- und Ausgangskanal.

Dann entfällt in (4.22) die Interferenz mit dem Proton-Transfer und der Quotient der Wirkungsquerschnitte ist im wesentlichen gegeben durch $\mathrm{Re}\, F^{\lambda^2}(q, E_{nA})$, wo q der transferierte Impuls ist[55].

In Fig. 6 ist diese Größe, die das off-shell-Verhalten des totalen Neutron-Wirkungsquerschnittes beschreibt, als Funktion des Abstandes von der Massenschale,

$$S = \frac{q^2}{2\mu_{nA}} - E_{nA} \,, \tag{5.5}$$

für die Neutronenenergien E_{nA}= 1 und 3 MeV dargestellt. In dem hier relevanten Bereich, 2.225 MeV $\leq E_{nA} \lesssim$ 7 MeV, wo die untere Grenze durch die Deuteron-Bindungsenergie vorgegeben ist, ergeben sich also Unterschiede bis zu einer Größenordnung, wenn man den Drehimpuls ℓ um eine Einheit ändert.

Man könnte allerdings argwöhnen, daß durch die Wechselwirkung im Ein- und Ausgangskanal das Spektrum der transferierten Impulse so breit wird, daß dieser Effekt nicht wirklich zum Tragen kommt. Um darüber eine Aussage zu gewinnen, sind in Fig. 8, die im Detail im nächsten Abschnitt beschrieben wird, neben den Ergebnissen der exakten Rechnungen (durchgezogene Kurven) auch die Resultate der Pol-Graphen-Näherung aufgetragen worden. Dabei sind letztere mit einem Faktor r_D multipliziert worden, der den pauschalen

Einfluß der Wechselwirkungen im Ein- und Ausgangskanal auf den absoluten Wert des Wirkungsquerschnitts berücksichtigt.

Zur Bestimmung dieses Faktors r_D wurden für einige gebundene Zustände mit ansonsten gleichen Quantenzahlen kurz unterhalb der Schwelle Transferwirkungsquerschnitte mit und ohne Distorsion (DWBA und PWBA) berechnet und der Quotient der Resultate in den Bereich oberhalb der Schwelle extrapoliert[55].

Dieses Verfahren ist sinnvoll, da die Wirkungsquerschnitte (Fig. 8) keine ausgeprägte Winkelabhängigkeit zeigen.

Z. B. für $E_x = 4$ MeV und $\theta_p = 15^\circ$ ($s \approx 4$ MeV) ist r_D für $\ell=2$ doppelt so groß wie für $\ell=1$, während sich $Re\, F^{\lambda 2}(q, E_{nA})$ um einen Faktor 4 ändert.

Die ungefähre Übereinstimmung der so gewonnenen gestrichelten mit den durchgezogenen Kurven in Fig. 8 läßt darauf schließen, daß das off-shell-Verhalten der Streuamplitude in der Tat den geschilderten Drehimpuls-abhängigen Einfluß auf den Transfer-Wirkungsquerschnitt hat.

Betrachten wir den Einfluß der Interferenz mit dem Proton-Transfer, (4.25), auf den Quotienten der Wirkungsquerschnitte, (4.22), so ergeben die Rechnungen, daß $\sigma^{PT\text{-}Int}$ für transferierte Drehimpulse $\ell \geq 2$ einen Beitrag von nur wenigen Prozent zu Gl. (4.22) liefert. In diesen Fällen können wir die Interferenz also vernachlässigen, und Gl. (4.22) reduziert sich zusammen mit der in Abschnitt 5.1 diskutierten Vernachlässigung von $\sigma^{(J)}$ auf den einfachen DWBA-Ausdruck

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{pB}} \Big/ \bar{\sigma}_\ell^{\,total} \right)_{\ell \geq 2} \cong \frac{\mu_{pB}\mu_{dA}}{(2\pi)^2} \frac{k_{pB}}{k_{dA}} \frac{2}{3} D_0^2 \frac{2\mu_{nA} k_{nA}^3}{(2\pi)^3} \tag{5.6}$$

$$\cdot \sum_m \left| \sum_{\ell_p \ell_d} \prod_{\ell_d \ell_p}^{\ell_m}(\theta) \int \chi_{\ell_p}^{*} \left(Re\, \varphi_\ell^{\lambda(+)}(k_{nA}, r) + i\, j_\ell(k_{nA} r) \right) \chi_{\ell_d} \frac{dr}{r} \right|^2 .$$

Für transferierte Drehimpulse $\ell \leq 1$ ergibt sich allerdings ein merklicher Einfluß der Interferenz. Für $\ell=1$ Transfer vermindert sie den Quotienten (4.22) um 10-50 % und für $\ell=0$ Transfer kann $\sigma^{PT\text{-}Int}$ sogar den Beitrag von $\sigma^{(R)}$ nahezu kompensieren. Damit unterstützt also auch die Interferenz mit dem Proton-Transfer die Bevorzugung hoher transferierter Drehimpulse im (d,p)-Wirkungsquerschnitt im Vergleich zum totalen Neutron-Querschnitt.

5.3.3 Die Ergebnisse für symmetrische Resonanzen

Die Ergebnisse unserer Rechnungen für die in den Spektren in Fig. 1 auftretenden symmetrischen Resonanzen sind in Fig. 7 und 8 zusammengestellt. Fig. 7 vergleicht die aus den experimentellen Spektren extrahierten Quotienten der Resonanzflächen mit den aus Gl. (4.22) berechneten theoretischen Werten. Es zeigt sich eine deutliche Gruppierung der experimentellen Werte um die theoretischen Kurven zu verschiedenen transferierten Drehimpulsen. Zur Demonstration des Einflusses des Proton-Transfers auf die Resonanzen mit übertragenem Drehimpuls $\ell=1$ ist mit der gestrichelten Kurve die Näherung (5.6) auch für diesen Fall eingetragen worden.

Aus den in Fig. 7 dargestellten Resultaten lassen sich zwei Schlüsse ziehen.

Die gute Übereinstimmung der gemessenen mit den berechneten Quotienten der Resonanzflächen beweist die Gültigkeit des für den Neutron-Transfer in Resonanzzustände angenommenen Reaktionsmechanismus. Damit gewinnen wir für die Transferreaktion ins Kontinuum im Gegensatz zur Situation bei gebundenen Endzuständen eine Aussage über den Mechanismus

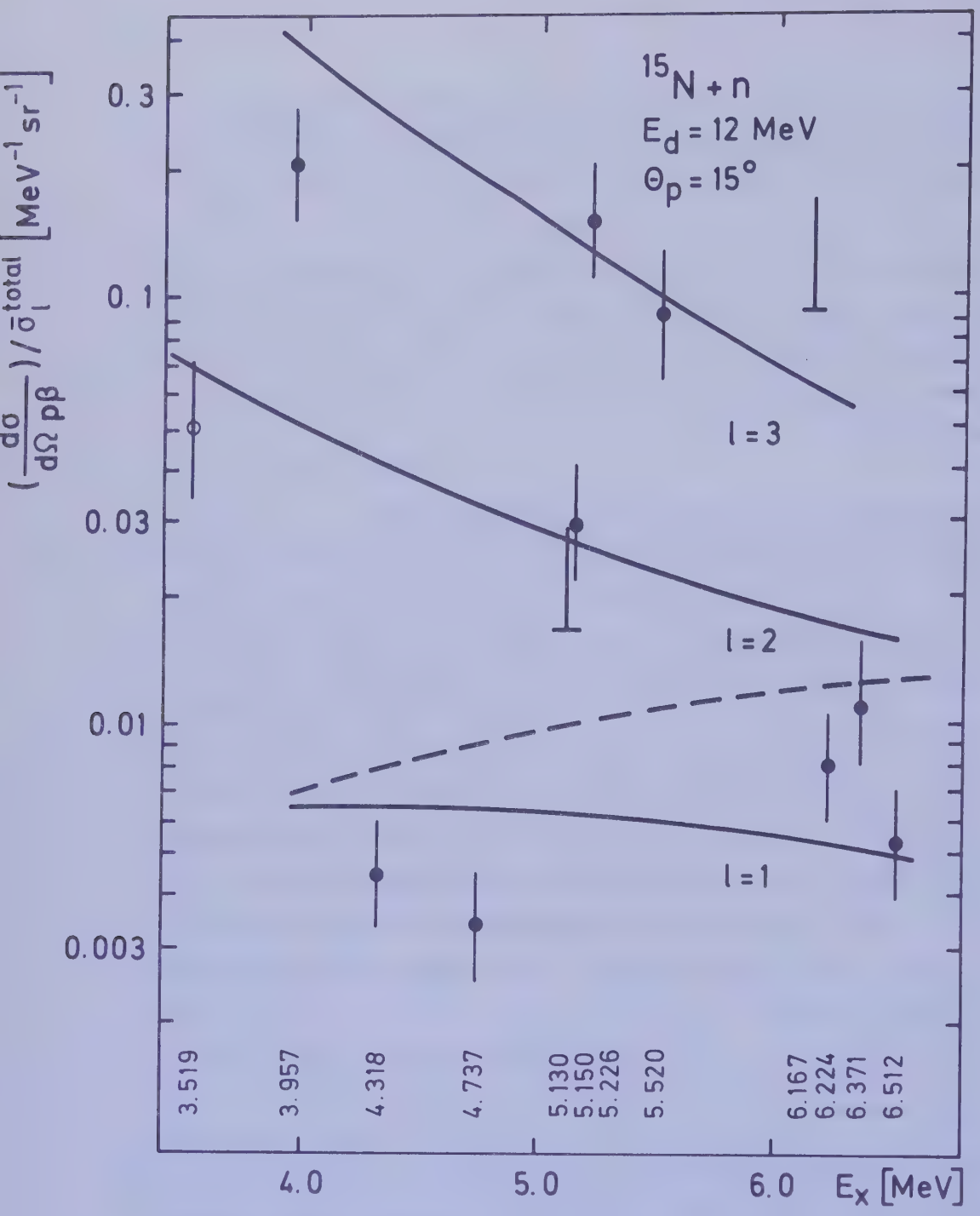


Fig. 7: Die Quotienten aus (d,p)- und totalem Neutron-Wirkungsquerschnitt am ^{15}N für symmetrische Resonanzen aufgetragen über der Anregungsenergie E_x in ^{16}N und für den Protonenwinkel $\theta_p = 15^o$, jeweils integriert über die Resonanz. Die experimentellen Werte sind Ref.[43] und[52] entnommen, die durchgezogenen Kurven für ℓ=2,3 sind mit Gl. (5.6) berechnet, die für ℓ=1 mit Gl. (4.22). Die gestrichelte Kurve entspricht der Näherung (5.6) für den ℓ=1 Transfer. Die experimentellen Werte für E_x = 5.13 und 6.167 Me sind Abschätzungen nach unten.

unabhängig von spektroskopischen Faktoren. Diese können dann andererseits, da jede Aussage über spektroskopische Faktoren einen definierten Reaktionsmechanismus voraussetzen muß, aus der (d,p)-Reaktion für die betrachteten Resonanz-Zustände mit größerer Sicherheit extrahiert werden.

Das zweite wesentliche Ergebnis ist, daß, zumindest für den Bereich einiger MeV oberhalb der Neutron-Schwelle, der Vergleich der Resonanzen im (d,p)- und im totalen Wirkungsquerschnitt in der Tat eine sensitive Methode zur Bestimmung des transferierten Drehimpulses darstellt und damit Aussagen über den Spin einer Resonanz erlaubt.

Wir betonen noch einmal, daß dies hier nur durch Untersuchen der absoluten Größe des (d,p)-Wirkungsquerschnitts möglich ist, während für (d,p)-Reaktionen in einen gebundenen Zustand oft schon die Form der Winkelverteilung bei kleinen Proton-Winkeln eine Festlegung des transferierten Drehimpulses gestattet.

Fig. 8 zeigt die über die Resonanz integrierten experimentellen Winkelverteilungen[43] für die hier betrachteten Fälle, die alle im gezeigten Winkelbereich keinerlei Struktur zeigen, aus der sich Information gewinnen ließe.

Dabei ist der differentielle Wirkungsquerschnitt als Funktion des Abstandes s (Gl. 5.6) von der Massenschale, wie er sich aus der Kinematik des Pol-Graphen, Fig. 1, ergibt, aufgetragen worden, um den physikalischen Zusammenhang mit dem off-shell-Verhalten der Neutron-Streuamplitude zu unterstreichen. Die Abhängigkeit dieses Abstands vom Streuwinkel und von der Anregungsenergie der Resonanz ist in Fig. 9 dargestellt. Es ist klar, daß das Neutron im Pol-Graphen, Fig. 1, mindestens um den Betrag ε_d der Deuteron-Bindungsenergie von der Massenschale entfernt sein muß.

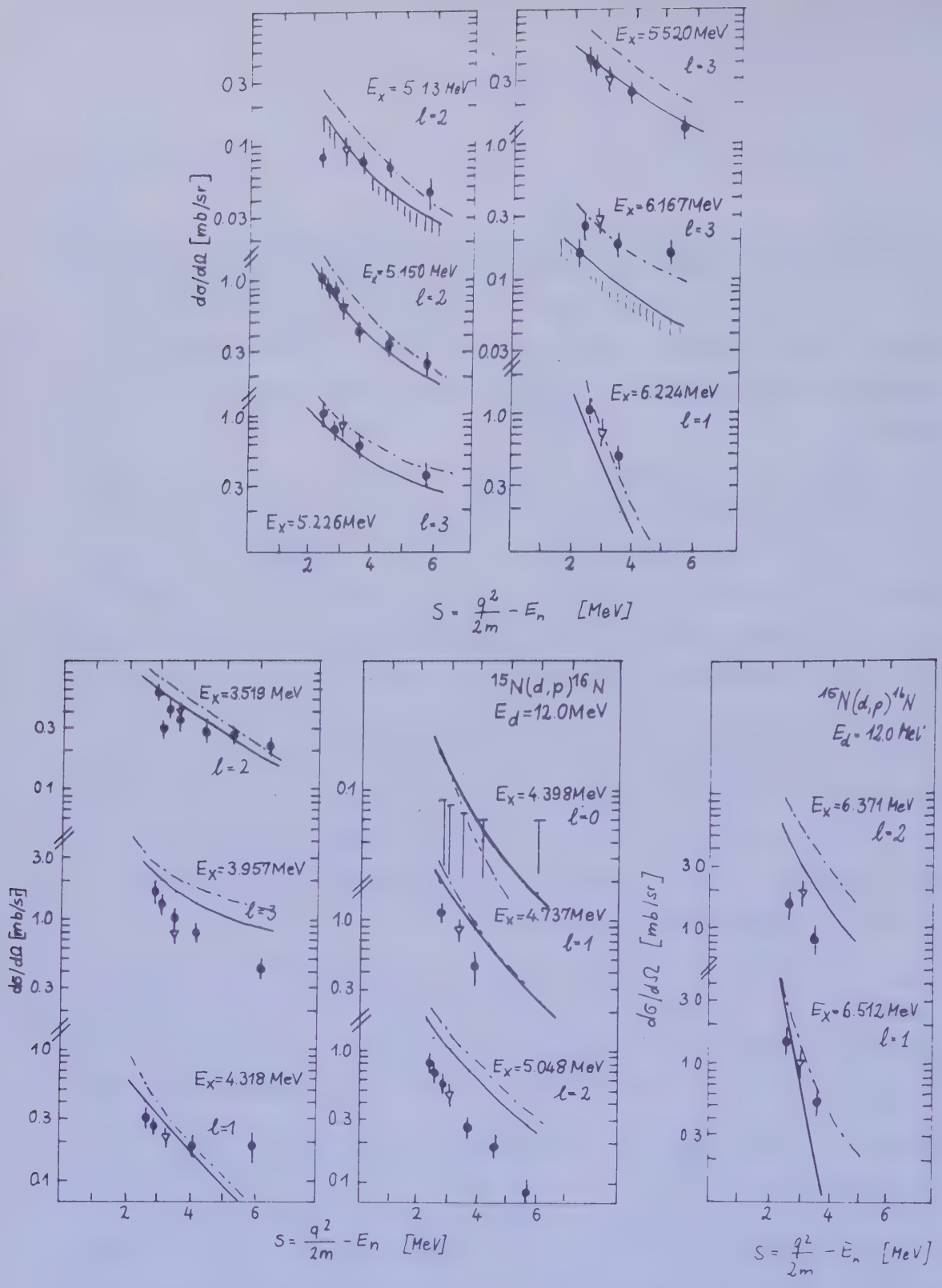


Fig. 8: Die Proton-Winkelverteilungen aus $^{15}N(d,p)$ für die symmetrischen Resonanzen, aufgetragen über den Abstand s des Neutrons von der Massenschale (Fig. 9). Die durchgezogenen Kurven sind für ℓ=1 mit Gl. (4.22), für ℓ=2,3 mit (5.6) berechnet, jeweils multipliziert m dem gemessenen totalen Wirkungsquerschnitt[52]. Die gestrichelten Kurven geben die Pol-Graphen-Rechnungen von Ref.[55] wieder (dort als durchgezogene Kurve gezeigt). Die experimentellen Werte für E_x = 4.39 MeV sowie die theoretischen für E_x = 5.130 MeV und 6.167 MeV sind obere Grenzen.

Die in Fig. 8 eingezeichneten durchgezogenen Kurven sind die berechneten Werte des Quotienten (4.22) multipliziert mit dem gemessenen Wert[52] des über die Resonanz integrierten totalen Wirkungsquerschnitts. Wir erhalten in allen Fällen recht gute Übereinstimmung sowohl mit der absoluten Größe als auch mit der Form der Winkelverteilungen.

In die Fig. 8 sind auch die Resonanzen bei E_x = 4.398 MeV und 5.048 MeV aufgenommen worden, die maximale Interferenz mit dem Untergrund zeigen, also eine Untergrundphase δ_0 in der Nähe von π haben. Diese Resonanzen wurden nach dem gleichen Verfahren wie die Resonanzen mit $\delta_0 = 0$ behandelt, und es ergibt sich ähnlich gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Die Anwendung dieser Methode ist gerechtfertigt, da Gl. (4.20) auch für $\delta_0 = \pi$ gilt. Ebenfalls ist die in das Modell für $4\lambda^0$ und 6^0 (Abschnitt 4.2) eingehende Voraussetzung nicht zu kleiner Ein-Teilchen-Breite erfüllt, da sich im Gegensatz zum Verhalten eines pseudogebundenen Zustandes (Abschnitt 4.1) die Interferenz zumindest bei E_x = 5.048 MeV im (d,p)- gegenüber dem totalen Wirkungsquerschnitt nicht ändert. Da die ℓ=0 Resonanz bei E_x = 4.398 MeV im Protonspektrum nicht beobachtet wird, können hier für das Experiment in Fig. 8 nur obere Grenzen angegeben werden.

Ebenso sind die theoretischen Werte für die Resonanzen bei E_x = 5.130 MeV und 6.167 MeV in Fig. 8 obere Grenzen, da diese Resonanzen im totalen Wirkungsquerschnitt nicht gesehen werden.

Die aus Figur 7 abzulesenden und in Figur 8 angegebenen Drehimpulsquantenzahlen stimmen mit den in Ref.[43] im Rahmen eines qualitativen Modells gewonnenen Ergebnissen überein. Dort sind diese Resultate und die sich daraus ergebenden Möglichkeiten für die Spins der Resonanzen auch mit den aus anderen Reaktionen extrahierten Werten verglichen worden.

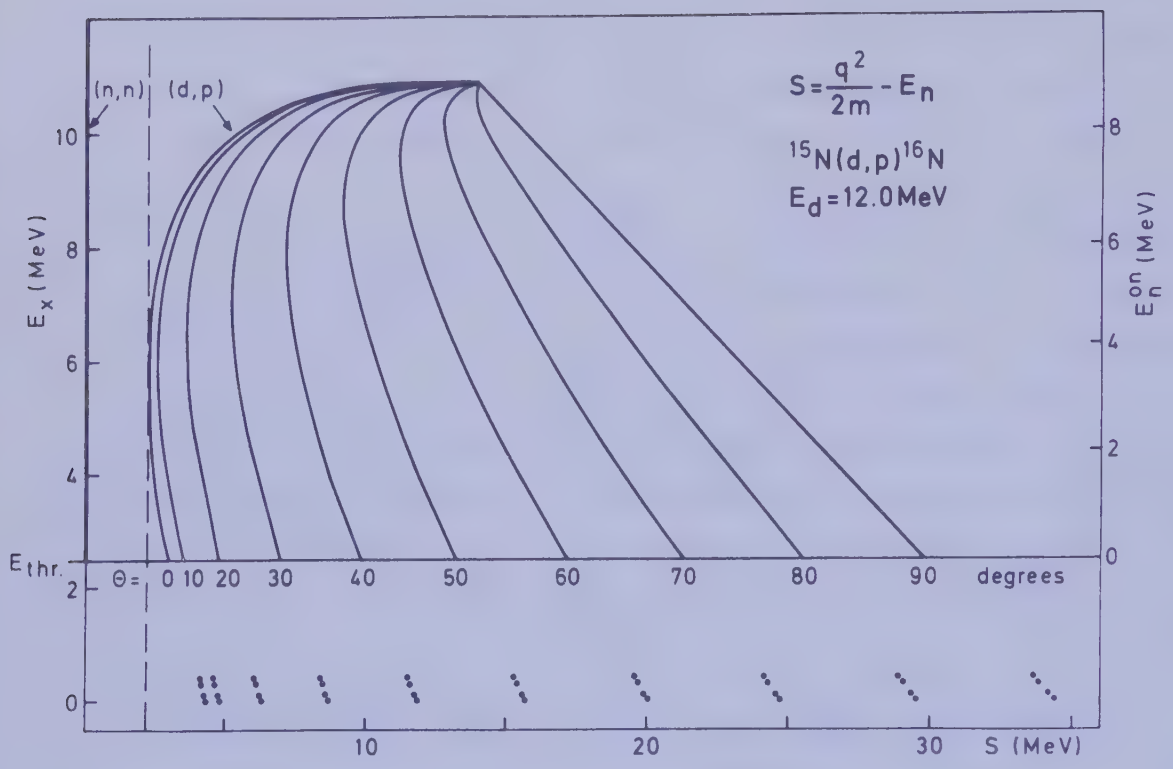


Fig. 9: Der Abstand von der Massenschale, s, des Neutrons in der $^{15}N(d,p)$-Reaktion, berechnet aus der Kinematik des Polgraphen, Fig. 1, als Funktion der Anregungsenergie E_x im ^{16}N und des Protonwinkel θ. Die Punkte im unteren Teil der Figur entsprechen den vier gebundenen Zuständen des ^{16}N.

5.3.4 Die Interferenzstruktur bei E_x = 5.73 MeV

Die Untersuchung nicht symmetrischer Resonanzen im Rahmen des bisher diskutierten Modells ist numerisch sehr aufwendig, da der (d,p)-Wirkungsquerschnitt in der Resonanz für eine möglichst enge Folge von transferierten Energien berechnet werden muß, und es nicht genügt, den über die Resonanz integrierten Wirkungsquerschnitt zu betrachten.

Zur Diskussion der Interferenzstruktur bei E_x = 5.73 MeV beschränken wir uns deshalb auf die Pol-Graphen-Näherung (2.7), vernachlässigen also die Wechselwirkung im Ein- und Ausgangskanal sowie die Interferenz mit dem Proton-Transfer.

In dieser Näherung und unter Vernachlässigung des Spins ist der differentielle (d,p)-Wirkungsquerschnitt gegeben durch[55]

$$\frac{d\sigma^P}{dE_{pB}\,d\Omega_{pB}} = \frac{\mu_{pB}\mu_{dA}}{(2\pi)^2}\,\frac{k_{pB}}{k_{dA}}\,\frac{|M_{d,pn}|^2}{\left|E_{nA}-\frac{q_{nA}^2}{2\mu_{nA}}\right|^2}\,\frac{1}{\pi}\,(2\ell+1)4\pi$$

$$\cdot\left\{ Re\left[F_\lambda^2(q_{nA},E_{nA})\,e^{2i\delta_0}\right]\frac{\frac{1}{2}\Gamma_\lambda^2}{(E-E_\lambda)^2+\frac{1}{4}\Gamma_\lambda^2} - Im\left[F_\lambda^2(q_{nA},E_{nA})\,e^{2i\delta_0}\right]\frac{(E-E_\lambda)\,\Gamma_\lambda}{(E-E_\lambda)^2+\frac{1}{4}\Gamma_\lambda^2}\right\}, \qquad (5.7)$$

wobei berücksichtigt ist, daß nur der elastische Neutron-Target-Kanal offen ist.

Das Ergebnis der Berechnung dieses Ausdrucks ist in Fig. 5b dargestellt. Es zeigt sich, daß die experimentell gefundene Änderung der Interferenzstruktur mit wachsendem Proton-Winkel, und damit wachsendem Abstand s von der Massenschale, qualitativ reproduziert werden kann. Die in die Rechnung eingegangenen Resonanzparameter sind $\delta_0 = -\pi/4$ und Γ_λ = 0.024 MeV. Für den transferierten Drehimpuls ist ℓ=1 angenommen worden, die Rechnungen mit höheren ℓ-Werten ergaben

für die betrachteten Proton-Winkel gegenüber dem totalen Wirkungsquerschnitt keine Veränderungen der Interferenzstruktur.

Es muß betont werden, daß die hier vollzogene Erklärung der Änderung der Resonanzform allein durch das off-shell Verhalten der Streuamplitude sicherlich unvollständig ist. So wird z.B. auch der kohärente Proton-Transfer das Interferenzverhalten wesentlich beeinflussen, so daß die Relevanz des hier gewonnenen Ergebnisses sehr vorsichtig beurteilt werden muß.

Immerhin kann man nach dem in Abschnitt 5.3.2 gesagten erwarten, daß der Proton-Transfer die höheren Partialwellen wenig beeinflußt, so daß eine beobachtete deutliche Änderung der Interferenzstruktur mit wachsendem Abstand von der Massenschale auf einen kleinen transferierten Drehimpuls schließen läßt.

5.4 Vergleich von ^{24}Mg(d,p) und ^{24}Mg(n,total)

Die experimentellen Daten für die Reaktionen ^{24}Mg(d,p) und ^{24}Mg(n,total) sind nach dem gleichen Verfahren, wie es für den Targetkern ^{15}N ausführlich beschrieben worden ist, ausgewertet worden. Die Resultate der Messungen sind in Fig. 10 zusammengestellt worden.

Das obere Spektrum ist das von Fuchs et al.[56] gemessene Protonenspektrum nach der Reaktion ^{24}Mg(d,p) bei einer Einschußenergie E_d = 12 MeV und dem Protonen-Winkel θ_p = 12.5°. Der untere Teil von Fig.10 zeigt den am ^{24}Mg gemessenen totalen Neutron-Wirkungsquerschnitt[56-59]. Beide Spektren zeigen wiederum eine weitgehend parallele Resonanzstruktur.

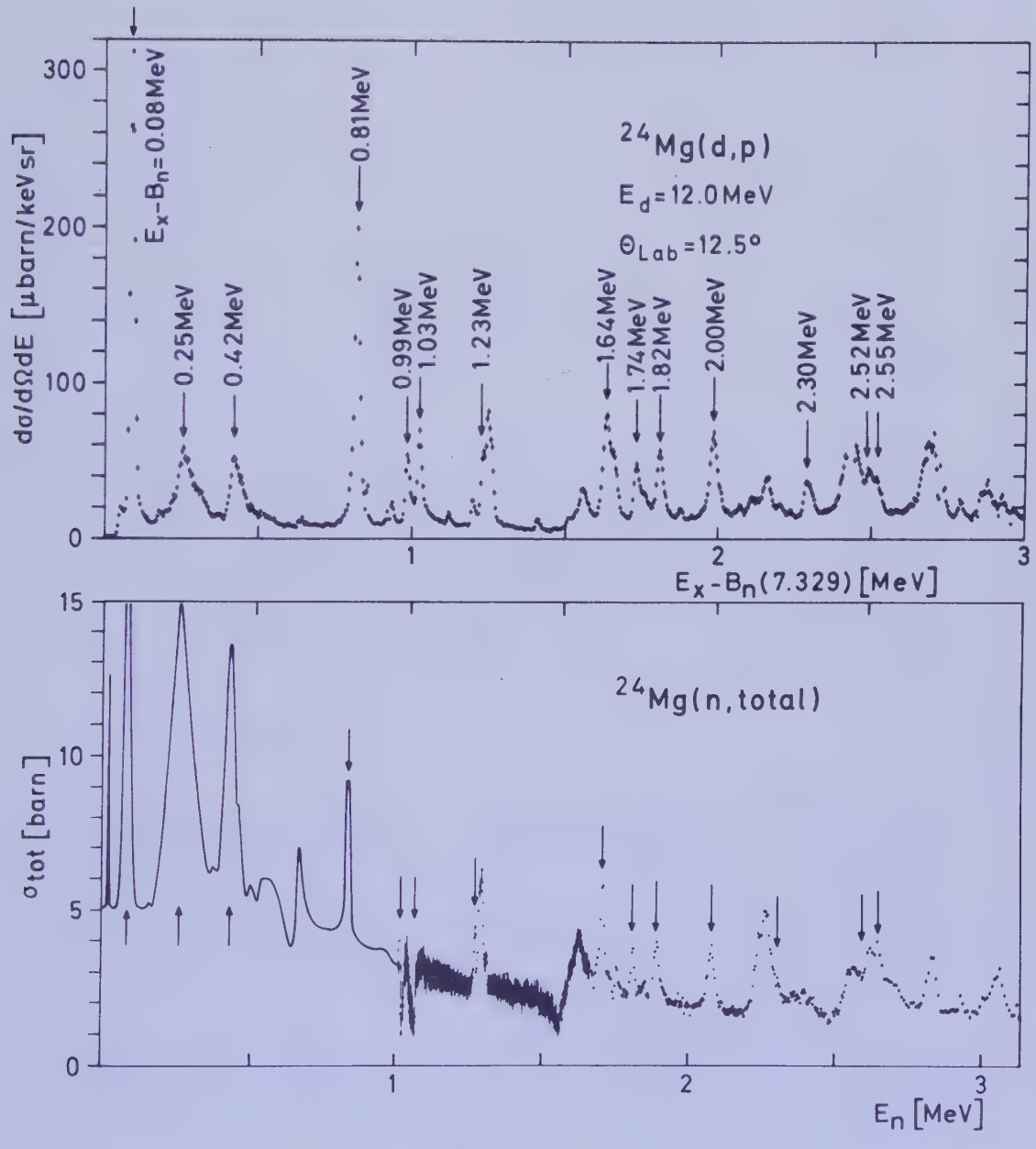


Fig. 10: Das Protonenspektrum aus der (d,p)-Reaktion bei E_d = 12 MeV und θ_p = 12.5° [56] und der totale Wirkungsquerschnitt (E_n < 0.5 MeV Ref. [58], 0.5 < E_n < 1.0 MeV Ref. [59], 1.0 MeV < E_n Ref. [56,57]) für den Targetkern ^{24}Mg.

5.4.1 Die Resonanzen bei E_x = 8.32 MeV und E_x = 8.36 MeV

Besonders hingewiesen sei auf die beiden Resonanzen bei $E_x - B_n$ = 0.99 und 1.03 MeV (B_n = 7.329 MeV). Sie zeigen im totalen Wirkungsquerschnitt maximale Interferenz mit dem Untergrund, $\delta_o = \pi$. Dagegen stehen sie im (d,p)-Protonenspektrum aufrecht auf dem Untergrund, kehren ihr Interferenzverhalten also vollkommen um. Das ließe sich, wie in Abschnitt 4.1 diskutiert, erklären durch die Annahme pseudogebundener Resonanz-Zustände, die außerhalb der Massenschale nicht mit dem Untergrund der Neutronenstreuung interferieren, unabhängig von ihrem Verhalten auf der Massenschale. Allerdings haben wir noch keine theoretischen Rechnungen zu diesen Resonanzen durchgeführt. Wir können nur feststellen, daß es sich um ℓ=0-Resonanzen handeln muß, da bei diesen Energien im totalen Wirkungsquerschnitt nur in der s-Welle hinreichend viel interferenzfähiger Untergrund vorhanden ist.

5.4.2 Die symmetrischen Resonanzen

Der Vergleich der symmetrischen Resonanzen in beiden Spektren ist analog dem in Abschnitt 5.3 beschriebenen durchgeführt worden. Die verwendeten Parameter für den Kanal- und den Potentialradius sind a = 5.5 fm und b = 3.0 fm. Die in Abschnitt 5.3.1 gemachten Aussagen über die Abhängigkeit der Ergebnisse von diesen Parametern gelten auch hier, ebenso die Ausführungen in Abschnitt 5.3.2 über den Einfluß der Interferenz mit dem Proton-Transfer.

Die Parameter der optischen Potentiale sind den Arbeiten[60] und [54] entnommen und in Tabelle 1 zusammengestellt worden.

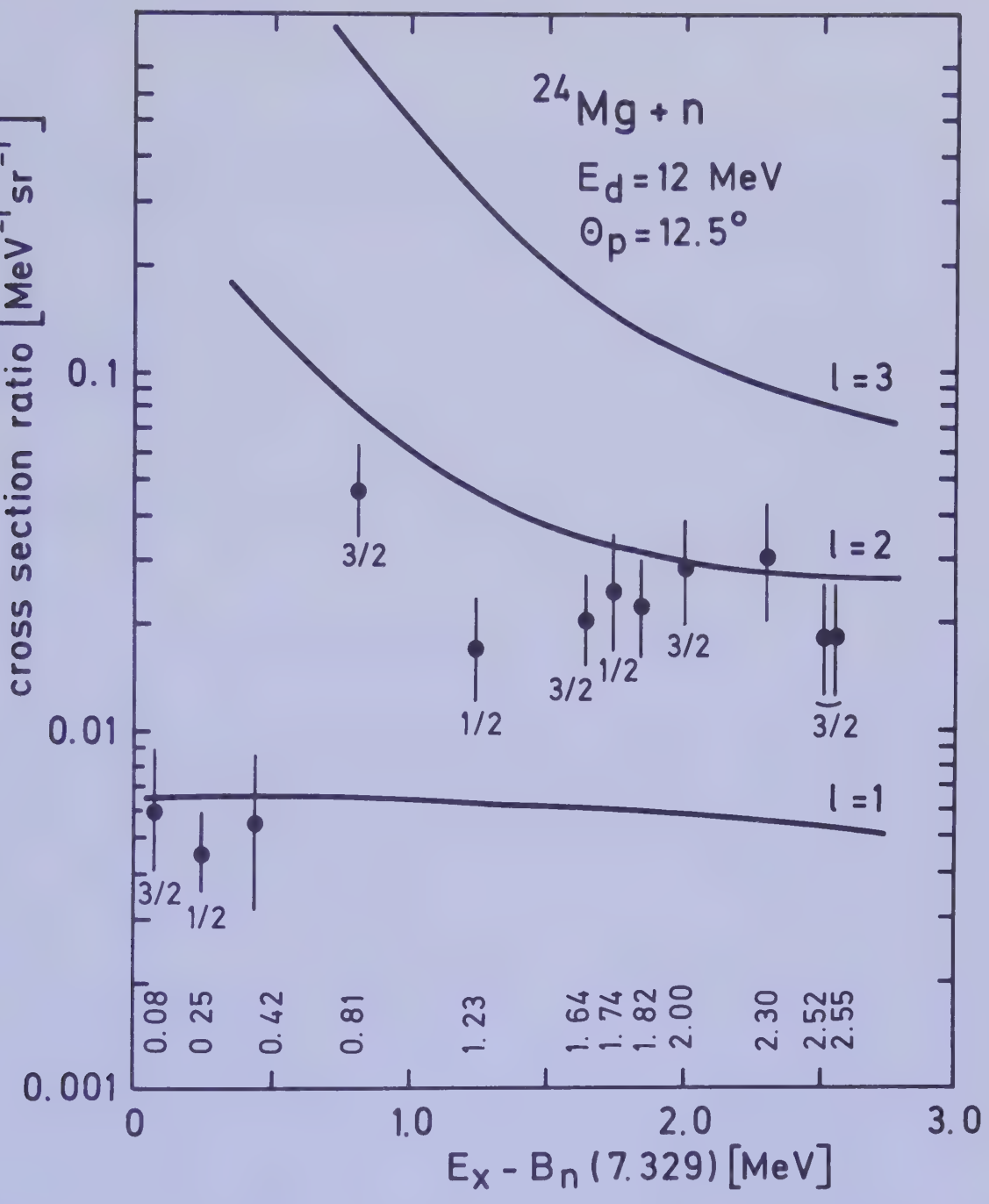


Fig. 11: Die Quotienten am (d,p)- und totalem Neutron-Wirkungsquerschnitt am ^{24}Mg für symmetrische Resonanzen, jeweils integriert über die Resonanz und aufgetragen über der Anregungsenergie E_x im ^{25}Mg relativ zur Neutron-Schwelle B = 7.329 MeV. Die experimentellen Werte sind Ref.[57] entnommen, die Kurven für ℓ=2,3 sind mit Gl. (5.6) berechnet, die für ℓ=1 mit Gl. (4.22). Die an einigen Meßdaten angegebenen Spinwerte sind ebenfalls [57] entnommen.

Die gemessenen und berechneten Quotienten der jeweils über die Resonanz integrierten Wirkungsquerschnitte sind in Fig. 11 abgebildet.

Wir sehen wiederum eine Gruppierung der experimentellen Resultate um die gerechneten Kurven. Die nicht gezeigte theoretische Kurve für ℓ=0-Transfer liegt bei Werten des Wirkungsquerschnitt-Verhältnisses um $2 \cdot 10^{-4}$ $MeV^{-1} sr^{-1}$.

Die an einigen Meßdaten angegebenen Spin-Werte sind durch Auswerten der Resonanzhöhen im totalen Wirkungsquerschnitt nach der einfachen Beziehung

$$\sigma_{J_B}^{total} = 2\pi \frac{1}{k^2} (2J_B+1) \sin^2\delta , \qquad (5.8)$$

wo δ die Streuphase und J_B der Spin der Resonanz sind, von Bommer bestimmt worden[57]. Ein Widerspruch zu unserer Bahn-Drehimpulsbestimmung (der Spin des Targets ist J_A=0) ergibt sich nur für die Resonanz bei E_x-B_n=1.74MeV. Allerdings ist hier schon ein (n,nγ) Kanal, wenn auch mit sehr kleinen Wirkungsquerschnitten, offen, so daß Gl. (5.8) nicht in Strenge anwendbar ist. Eine ähnliche Analyse der ^{24}Mg(d,p)- und (n,total)-Daten ist von Baur und Trautmann[23] durchgeführt worden, allerdings nur in Butler-Näherung für den (d,p)-Wirkungsquerschnitt. Dort ergibt sich eine starke Abhängigkeit der berechneten Ergebnisse vom Butler-Abschneideradius R, und die beste Übereinstimmung mit dem Experiment erhält man für den sehr großen Abschneideradius R = 6.7 fm, so daß die physikalische Interpretation dieser Ergebnisse unklar ist.

Insgesamt erscheint die Situation für die Resonanzen im ^{25}Mg weniger übersichtlich als für die im ^{16}N. Das liegt vor allem an der sehr komplizierten Struktur der Spektren, die eine Trennung verschiedener Resonanzen oft nur mit großen Unsicherheiten zuläßt und auch die Anwendbarkeit der

von uns benutzten Näherung isolierter Resonanzen in vielen Fällen zweifelhaft erscheinen läßt. Insbesondere gilt dies für die Resonanzen bei $E_x - B_n$ = 1.23, 2.30, 2.52 und 2.55 MeV.

6. Zusammenfassende Diskussion

In dieser Arbeit ist der Zusammenhang des Deuteron-induzierten Neutron-Transfers in Resonanzzustände mit der elastischen Streuung des Neutrons bzw. dem totalen Neutron-Wirkungsquerschnitt am gleichen Target untersucht worden.

Im Rahmen der Shapiro-Theorie der nicht relativistischen Feynman-Graphen ist die Transferreaktion als direkter Einstufenprozeß (Polgraph) mit Berücksichtigung der Wechselwirkung im Ein- und Ausgangskanal und der Interferenz mit dem kohärenten Proton-Transfer beschrieben worden.

Die Voraussetzung dieses Reaktionsmechanismus führt auf einen linearen Zusammenhang zwischen dem (d,p)-Wirkungsquerschnitt und der off-shell Neutron-Streuamplitude, deren Darstellung im Rahmen der R-Matrix-Theorie der Kernreaktionen wiederum einen einfachen Vergleich mit der Streuung auf der Massenschale bzw. dem totalen Wirkungsquerschnitt gestattet.

Der Vergleich dieser Theorie mit dem Experiment hat zu zwei wesentlichen Resultaten geführt.

Zum einen ist gezeigt worden, daß die Rechnungen das gemessene Verhältnis des Transfer- zum totalen Wirkungsquerschnitt quantitativ und unabhängig etwa von spektroskopischen Faktoren reproduzieren können. Das läßt den Schluß zu, daß der angenommene Reaktionsmechanismus die Transferreaktion in den hier betrachteten Fällen tatsächlich wiedergibt, und damit eine wesentliche Voraussetzung gesichert ist für alle Untersuchungen, die die beobachteten Resonanzzustände mit geeigneten Modellzuständen vergleichen wollen.

Trotz dieser Übereinstimmung von Theorie und Experiment sei daran erinnert, daß wir die aus der Shapiro-Theorie

gewonnene Amplitude nur in einer DWBA-äquivalenten Näherung ausgewertet haben. Die Ergebnisse zeigen, daß diese Näherung unkritisch zu sein scheint.Dennoch ist die Auswertung der exakten Shapiro-Amplitude ein interessantes und im übrigen wohldefiniertes Problem, das insbesondere eine physikalischere Interpretation der DWBA-Näherung erlauben würde.

Eine weitere noch offene Frage ist der Einfluß anderer kohärenter Prozesse auf das Resonanzverhalten des Transfer-Wirkungsquerschnittes. Wir haben hier nur den Proton-Transfer als den wohl dominanten konkurrierenden Prozeß berücksichtigt und festgestellt, daß diese Interferenz die Resonanzen in den niedrigen Partialwellen zum Teil wesentlich beeinflußt. Es ist à priori nicht auszuschließen, daß die Berücksichtigung anderer Prozesse, wie etwa des "heavy particle stripping", nicht zu ähnlichen Effekten führt.

Der zweite Punkt ist die beschriebene Abhängigkeit des (d,p)-Wirkungsquerschnitts, verglichen mit dem totalen Wirkungsquerschnitt, vom transferierten Drehimpuls.

Wir haben gezeigt, daß diese Abhängigkeit auf drei Gründe zurückzuführen ist, nämlich (a) die sich auf die kleinen Partialwellen stärker auswirkende Absorption im Eingangs- und Endkanal, (b) die ebenfalls für kleine Drehimpulse besonders effektive Interferenz mit dem Proton-Transfer und schließlich (c) das stark Drehimpuls-abhängige off-shell Verhalten der Neutron-Streuamplitude, was insbesondere in der Nähe der Neutron-Schwelle der dominante Effekt ist. Die Beschreibung der off-shell Streuamplitude im Rahmen der R-Matrix-Theorie der Kernreaktionen hat sich als für unsere Zwecke besonders geeignet erwiesen, da die vollständige Parametrisierung der Resonanzphänomene einen weitgehend von

der Struktur des Resonanzzustandes unabhängigen Vergleich der zu betrachtenden Wirkungsquerschnitte gestattet.

Betrachten wir die in die R-Matrix-Theorie eingehende Neutron-Target-Wechselwirkung, so ist die einschneidendste Näherung des unseren Rechnungen zu Grunde liegenden Modells die Vernachlässigung jedweden langreichweitigen Potentials, da das die Neutron-Wellenfunktion im relevanten Bereich des DWBA-Matrixelementes merklich verändern könnte. Es sollten deshalb Rechnungen mit einem Woods-Saxon-Potential durchgeführt werden.

Dagegen ist die sehr simplifizierende Beschreibung der Ein-Teilchen-Funktion u_λ^0 im Innenraum als Lösung zu einem Kastenpotential wahrscheinlich ohne größeren Einfluß auf die Ergebnisse - zumindest für den Vergleich symmetrischer Resonanzen.

Insgesamt ist die in dieser Arbeit entwickelte Theorie in der Lage, das Verhalten des (d,p)-Wirkungsquerschnittes verglichen mit dem totalen Neutron-Target-Wirkungsquerschnitt für in letzterem symmetrische Resonanzen wiederzugeben. Sie liefert damit eine einfache Methode zur Bestimmung transferierter Drehimpulse für einen Energiebereich von einigen MeV oberhalb der Neutron-Schwelle.

Dieses Verfahren ist vom theoretischen Standpunkt aus einfach, da es nicht auf ein detailliertes Modell zur Beschreibung des Resonanzzustandes zurückgreifen muß, und experimentell unkompliziert, da man zur Drehimpulsbestimmung im Prinzip das (d,p)-Protonspektrum nur bei einem Protonen-Winkel benötigt, auf die Messung der ohnehin uncharakteristischen Winkelverteilungen also verzichten kann.

Die Verstärkung höherer transferierter Drehimpulse im (d,p)-Resonanzquerschnitt läßt außerdem die (d,p)-Reaktion

in gewissem Sinne als komplementär zur Neutronen-Streuung erscheinen.

Denn während in letzterer die höheren Partialwellen oft nur mühsam identifiziert werden können, bereitet ihre Untersuchung mit der (d,p)-Reaktion keine Schwierigkeiten, wogegen die auf der Massenschale für kleine Energien dominante S-Welle in der Transferreaktion völlig unterdrückt wird.

Über die in dieser Arbeit diskutierten Anwendungen der Theorie hinaus sollten insbesondere drei Fragestellungen untersucht werden.

Die erste hängt damit zusammen, daß in den hier numerisch behandelten Systemen im untersuchten Energiebereich nur der elastische Neutron-Target-Kanal offen ist. Auch in Hinblick auf die Unterschiede zwischen der Graphen-Theorie und der DWBA-Beschreibung ist die Untersuchung von Systemen mit mehreren offenen Kanälen von Interesse und ein Test auf die der Theorie zu Grunde liegenden Annahmen.

Zum anderen ist weitgehend ungeklärt die Situation für auf der Massenschale unsymmetrische Resonanzen. Ihre Behandlung im Rahmen der hier diskutierten Theorie ist komplizierter, erlaubt aber andererseits eine schärfere Prüfung der eingehenden Näherungen. Insbesondere die Interferenz des Neutron-Transfers mit kohärenten Prozessen wie dem hier allein diskutierten Proton-Transfer sollte das Verhalten unsymmetrischer Resonanzen kritischer beeinflussen und damit genauer untersucht werden können.

Schließlich sollte untersucht werden, in welcher Modifikation die Theorie auch auf den Proton-Transfer in Resonanzen anwendbar ist. Experimentell kann dann natürlich nicht der totale Wirkungsquerschnitt, aber die elastische Streuung zum Vergleich herangezogen werden. Für die Theorie ist die zentrale Frage, ob man für die off-shell Streuamplituden

mit Coulomb-Streuung ein optisches Theorem analog Gl. (2.5) formulieren kann, das ja auf der Massenschale sinnlos ist, in die in dieser Arbeit diskutierte Beschreibung des Transfers aber an entscheidender Stelle eingeht. Allerdings gilt auf der Massenschale Gl. (2.5) für jede Partialwelle einzeln auch für Coulomb-Streuung, so daß ein Vergleich von Resonanzen möglich sein sollte.

ANHANG I: Die off-shell-Streuamplitude im Schalenmodell der Kernreaktionen

Als Beispiel einer mikroskopischen Reaktionstheorie in dem Sinne, daß Resonanzen durch definitive Nukleonenkonfigurationen erklärt werden, soll in diesem Anhang das Schalenmodell der Kernreaktionen[37] zur Beschreibung der off-shell Streuamplitude herangezogen werden.

Wir halten uns soweit wie möglich an die Bezeichnungen von Ref.[37], worauf wir im folgenden mit "MW" verweisen.

Dort wird die S-Matrix und damit die Streuamplitude aus dem asymptotischen Verhalten der Wellenfunktion eines A-Nukleonen-Systems bestimmt. Diese Wellenfunktion ist die Lösung der Schrödinger-Gleichung in einem beschränkten Modellraum, der aus den Eigenzuständen eines Ein-Teilchen-Schalenmodell-Hamilton-Operators aufgebaut ist, wo sich immer nur ein Teilchen in einem Kontinuumszustand aufhalten darf.

Da außerhalb der Massenschale die S-Matrix nicht definiert ist, müssen wir wieder auf die Definition (3.3) bzw. (3.9) der Streuamplitude durch die Greensche Funktion zurückgehen,

(I.1)

$$M_{cc'}(p,p';E) = M_c^0(p,p';E)\,\delta_{cc'} + \langle \chi^{c'(-)}(p';E) \,|\, V - VG^{(+)}(E)\,V \,|\, \chi^{c(+)}(p;E) \rangle .$$

Das ist möglich, da die Wellenfunktion des Systems eine Lippmann-Schwinger-Gleichung (MW 3.9.6) erfüllt, deren Integralkern eine endliche Hilbert-Schmidt Norm hat.

Gleichung (I.1) muß im einzelnen erklärt werden.
M^0 ist die Amplitude für die reine Potentialstreuung, d.h. ohne Restwechselwirkung, und damit diagonal in den Kanal-

indices. Die Zustände $|\chi^{c(\pm)}(p;E)\rangle$ sind Slaterdeterminanten, wo das Teilchen im Kontinuum außerhalb der Massenschale sein kann,

$$|\chi^{c(\pm)}(p;E)\rangle = \mathcal{A}_A \left\{ \psi_{jl}^{(\pm)}(r_A;p,E)\,\varphi_c \right\} \qquad \text{(I.2)}$$

Dabei ist $\psi_{jl}^{(\pm)}$ gegeben durch die Lippmann-Schwinger-Gleichung (3.10) bzw. Lösung der inhomogenen Schrödinger-Gleichung (3.12) für das Schalenmodellpotential V_1. Alle anderen Symbole in (I.2) sind analog (MW 3.6.7) definiert. Auf der Massenschale gilt

$$|\chi^{c(\pm)}(k;E)\rangle = e^{\pm i\delta_c}\,\chi_E^c \qquad \text{(I.3)}$$

mit $k^2/2\mu = E$ und χ_E^c aus (MW 3.6.7).

Die Restwechselwirkung V ist in MW durch ihre Matrixelemente definiert (MW 3.7.3, 4). Die hier wegen des Auftretens der off-shell Zustände (I.2) notwendige Erweiterung liegt auf der Hand, indem wir in (MW 3.7.3, 4) auch die off-shell Zustände (I.2) zulassen.

Vernachlässigen wir die Kontinuum-Kontinuum-Kopplung analog MW Kap. 4.2, bedeutet das auchdie Vernachlässigung der entsprechenden off-shell Matrixelemente,

$$\langle \chi^{c'(-)}(p';E)\,|\,V\,|\,\chi^{c(+)}(p;E)\rangle = 0\,. \qquad \text{(I.4)}$$

Damit tritt in (I.1) die Greensche-Funktion $G^{(+)}$ nur zwischen gebundenen Zuständen auf.

Die Matrixelemente von $G^{(+)}$ erfüllen die Schrödinger-Gleichun

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{M}\left[(E_\ell - E)\,\bar{\sigma}_{\ell i} + V_{\ell i}\right] G_{ik} + \sum_{c=1}^{\Lambda}\int_{\varepsilon_c}^{\infty} dE'\, V_\ell^{c'}(E')\, G_k^{c'}(E';E) = \delta_{\ell k}\\
&\sum_{i=1}^{M}\left[(E_\ell - E)\,\delta_{\ell i} + V_{\ell i}\right] G_i^{c}(E';E) + \sum_{c'=1}^{\Lambda}\int_{\varepsilon_{c'}}^{\infty} dE''\, V_\ell^{c'}(E'')\, G^{c'c}(E'',E';E) = 0\\
&\sum_{i=1}^{M} V_i^{c}(E')\, G_{ik} + (E'-E)\, G_k^{c}(E';E) = 0\\
&\sum_{i=1}^{M} V_i^{c}(E')\, G_i^{c'}(E'';E) + (E'-E)\, G^{cc'}(E',E'';E) = \bar{\sigma}(E'-E'')\,\delta_{cc'},
\end{aligned}
\tag{I.5}
$$

wobei M gebundene Zustände und Λ Kanäle angenommen worden sind und die Notierung wohl unmittelbar einsichtig ist. Gl. (I.5) kann, wegen der Vernachlässigung der Kontinuum-Kontinuum-Kopplung, algebraisch gelöst werden und man erhält für die hier allein interessierenden Matrixelemente zwischen gebundenen Konfigurationen

$$
G_{ik} = -\left(\mathbb{D}^{-1}\right)_{ik}. \tag{I.6}
$$

mit (MW 4.2.20)

$$
\mathbb{D}_{j\ell} = (E - E_j)\,\delta_{j\ell} - V_{j\ell} - \sum_{c'=1}^{\Lambda}\int_{\varepsilon_{c'}}^{\infty} dE'\, \frac{V_j^{c'}(E')\, V_\ell^{c'}(E')}{E + i\varepsilon - E'}. \tag{I.7}
$$

Schreiben wir nun (I.1) explicit aus, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
M_{cc'}(p,p';E) = {} & M_c^0(p,p';E)\,\delta_{cc'}\\
& + \sum_{ij} \langle \chi^{c,(-)}(p';E)\,|V|\,\phi_i\rangle \left(\mathbb{D}^{-1}\right)_{ij} \langle \phi_j\,|V|\,\chi^{c'(+)}(p;E)\rangle.
\end{aligned}
\tag{I.8}
$$

Auf der Massenschale ist das das in MW angegebene Resultat (MW 4.2.24).

Um eine isolierte Resonanz zu betrachten, diagonalisieren wir $\mathbb{D}^{-1}$ und berücksichtigen nur ein Niveau. Wir erhalten

für die Resonanzamplitude analog (MW 4.2.44), wobei wir die Matrizen O und $\mathcal{O}$ (MW 4.2.25 und 4.2.36) zusammengefaßt haben,

$$\tilde{O}_{ij} = \sum_k \mathcal{O}_{ik} O_{kj}, \tag{I.9}$$

$$M^{\lambda}_{cc'}(p,p';E) = F^{c'}_{\lambda}(p';E)\, M^{\lambda}_{cc'}(E)\, F^{c}_{\lambda}(p,E). \tag{I.10}$$

$$M^{\lambda}_{cc'}(E) = \frac{1}{2\pi} e^{i\delta_{c'}} \frac{\Gamma^{1/2}_{\lambda c'} \Gamma^{1/2}_{\lambda c}}{E - E_{\lambda}} e^{i\delta_c} \tag{I.11}$$

ist die Resonanzamplitude auf der Massenschale (MW 4.2.44) und die Impulsfaktoren $F^{c}_{\lambda}(p,E)$ sind gegeben durch

$$F^{c}_{\lambda}(p,E) = \sqrt{2\pi}\, e^{-i\delta_c} \Gamma^{-1/2}_{\lambda c} \sum_i \tilde{O}_{\lambda i} \langle \phi_i | V | \chi^{c(+)}(p;E) \rangle. \tag{I.12}$$

Von der Struktur her ist das Ergebnis (I.10) identisch mit dem aus der R-Matrix-Theorie gewonnenen (3.43).

Das off-shell Verhalten der Amplitude (I.9), d.h. die Impulsabhängigkeit der Impulsfaktoren F^{c}_{λ} bei fester Energie, wird bestimmt durch die Ein-Teilchen-Funktionen $\psi_{jl}(r;p,E)$ im off-shell-Zustand (I.2). Deren Energieabhängigkeit ist auf der Massenschale im wesentlichen durch die Jost-Funktion $f_{lj}(k)$ gegeben (MW Kap. 2.6),

$$\psi_{jl}(r;k,E) \equiv u_{lj}(r,k) \sim s_{lj}(r,k) / f_{lj}(k), \tag{I.13}$$

und im wesentlichen für zwei Effekte verantwortlich: Die Nullstellen der Jost-Funktion definieren die Ein-Teilchen-Resonanzen und der in ihr enthaltene Faktor k^l bestimmt das Schwellenverhalten bei kleinen Energien.

Außerhalb der Massenschale geht, wie man an den Besselfunktionen in Gl. (3.10) sieht, nur die das Schwellenverhalten enthaltende Energieabhängigkeit in eine Impulsabhängigkeit über, während die Potentialresonanzen nach wie vor durch die Wellenfunktion als Funktion der Energie gegeben sind.

Der in[41] u.a. versuchte Ansatz, das off-shell Verhalten der Amplitude durch einen Quotienten von Jost-Funktionen, $f_\ell^{-1}(p)/f_\ell^{-1}(k)$, zu beschreiben, ist also nicht zu rechtfertigen.

Berücksichtigen wir, daß wir in den Matrixelementen der Restwechselwirkung in (I.8) nur den gebundenen Zustand antisymmetrisieren müssen, können wir noch mit Hilfe der Gln. (4.2) und(4.11) den Resonanz-Formfaktor $\varphi^{\lambda(+)}$, und damit mit Gl. (4.10) auch $\varphi^{\lambda(-)}$, für die DWBA-Matrixelemente angeben. Wir erhalten

$$\varphi^{\lambda(+)}(k,r) \sim \sum_i \langle G_1^{(+)}(r,r';E)\, \varphi_c | V | \phi_i \rangle \tilde{O}_{i\lambda}, \qquad \text{(I.14)}$$

wo das Matrixelement über die Koordinaten r' und die des Targets genommen werden muß und $G_1^{(+)}$ die Ein-Teilchen-Schalenmodell Greensche Funktion ist.

$\varphi^{\lambda(+)}$ ist also wiederum eine rein auslaufende Wellenfunktion. Ihre Berechnung ist allerdings wesentlich komplizierter als die des entsprechenden R-Matrix-Formfaktors.

ANHANG II: Zur Berechnung der radialen Matrixelemente

In diesem Anhang soll noch einmal detailliert auf die in Abschnitt 5.2 beschriebene Berechnung der radialen Matrixelemente

$$\underline{I} = \int_0^\infty \frac{dr}{r}\, \chi^*_{\ell_f}(k_{fB}, \tfrac{\mu_A}{\mu_B} r)\, \varphi_\ell(k_{iA} r)\, \chi_{\ell_d}(k_{dA}, r), \qquad \text{(II.1)}$$

wo φ_ℓ einer der in den Gleichungen (4.23) und (4.25) auftretenden Formfaktoren sein soll, eingegangen werden, und die benötigten Formeln zusammengestellt werden.

Das Integral ist, wie in Abschnitt 5.2 diskutiert, nur sehr schwach konvergent. Um es auszuwerten, benutzen wir die Methode von Vincent und Fortune[18]. Dazu teilen wir es auf in zwei Teile, von r=0 bis R bzw. R bis ∞, und betrachten nur den allein problematischen zweiten Teil. Der Radius R wird so gewählt, daß sich alle im Integranden auftretenden Funktionen für $r \geq R$ hinreichend genau als Linearkombination von Coulomb- bzw. sphärischen Bessel-Funktionen darstellen lassen,

$$\chi_\ell(k_i r) = e^{i\sigma_\ell}\left(\alpha_\ell H_\ell^{(+)}(\eta, kr) + \beta_\ell H_\ell^{(-)}(\eta, kr)\right) \qquad \text{für } r \geq R \text{ (II.2a)}$$

und

$$\varphi_\ell(k_i r) = \gamma_\ell h_\ell^{(+)}(kr) + \delta_\ell h_\ell^{(-)}(kr) \qquad \text{für } r \geq R. \text{(II.2b)}$$

Hier sind σ_ℓ die Coulomb-Streuphasen, η der Coulombparameter und $H_\ell^{(\pm)}$ die aus- bzw. einlaufende Coulomb-Funktion,

$$H_\ell^{(\pm)}(\eta, kr) = \frac{1}{k}\left(G_\ell(\eta, kr) \pm i F_\ell(\eta, kr)\right), \qquad \text{(II.3)}$$

wo F_ℓ und G_ℓ die reguläre bzw. irreguläre Coulomb-Funktion in der Konvention von[61] sind. $h_\ell^{(\pm)}$ sind die sphärischen Hankel-Funktionen erster und zweiter Art ($h_\ell^{(1)}$ und $h_\ell^{(2)}$ in [61]). Eine Abschätzung für sinnvolle Werte von R ist[18]

$$R \geq \ell_d(max) / k_{dA}, \qquad \text{(II.4)}$$

wo ℓ_d (max) die maximale in der Rechnung berücksichtigte Partialwelle der Deuteron-Wellenfunktion ist.

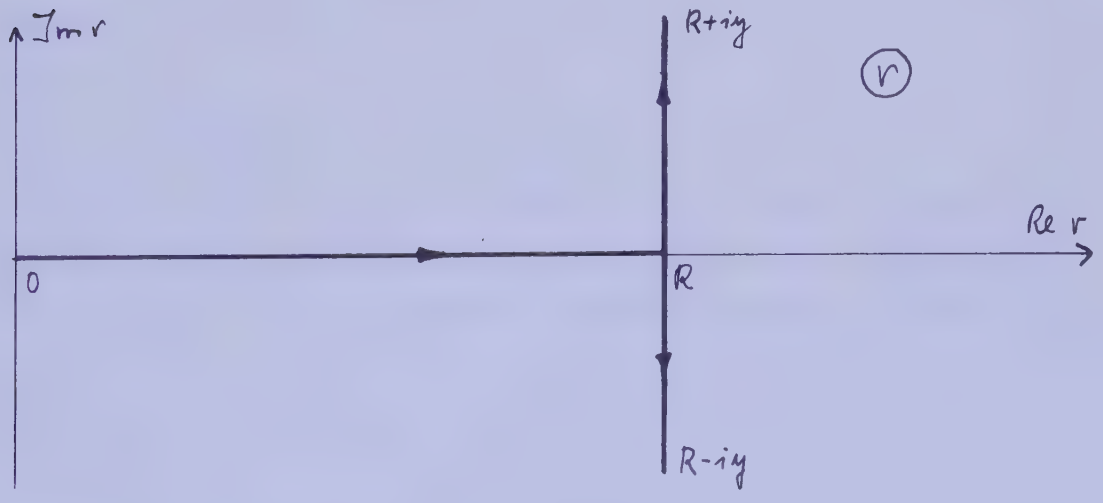


Fig. 12: Die komplexe r-Ebene mit den Integrationswegen zur Berechnung der radialen Matrixelemente.

Für r > R ist damit der Integrand in (II.1) gegeben als eine analytische Funktion der komplexen Variablen r[15]. Teilen

wir ihn auf gemäß

$$\chi^{*}_{\ell_p}(k_{pB},\tfrac{\mu_A}{\mu_B}r)\,\varphi_\ell(k_{nA},r)\,\chi_{\ell_d}(k_{dA},r) = e^{i\sigma_\ell^d}\alpha_\ell^d H^{(+)}_{\ell_d}(\eta_d,k_{dA}r)\,\chi^{+}_{\ell_p}(k_{pB},\tfrac{\mu_A}{\mu_B}r)\,\varphi_\ell(k_{nA},r)$$
$$+ e^{i\sigma_\ell^d}\beta_\ell^d H^{(-)}_{\ell_d}(\eta_d,k_{dA}r)\,\chi^{*}_{\ell_p}(k_{pB},\tfrac{\mu_A}{\mu_B}r)\,\varphi_\ell(k_{nA},r), \qquad \text{(II.5)}$$

so verschwindet, da für (d,p) immer

$$k_{dA} > k_{nA} + k_{pB} \qquad \text{(II.6)}$$

gilt, der erste Term in (II.5) für $|r| \longrightarrow \infty$ in der oberen rechten Halbebene der komplexen r-Ebene, und der zweite Term analog in der unteren rechten Halbebene. Wir können deshalb nach dem Cauchy'schen Hauptsatz, statt das Integral I von R bis ∞ auszuwerten, den ersten Term in (II.5) von R nach $R+i\infty$ integrieren und den zweiten von R nach $R-i\infty$, (vgl. Fig. 12). Auf diesen Wegen sind die Integranden asymptotisch jeweils exponentiell abfallende Funktionen, so daß die Integrale ohne Schwierigkeiten ausgewertet werden können. Dazu benötigen wir die Coulomb-Funktionen $H_\ell^{(+)}(kr)$ für komplexe Werte der Variablen r längs der beiden Integrationswege. Wegen

$$H_\ell^{(\mp)}(\eta,\varrho) = \left[H_\ell^{(\mp)}(\eta,\varrho^{*})\right]^{*} \quad \text{für reelle } \eta \qquad \text{(II.7)}$$

können wir uns dabei auf den Weg in der oberen Halbebene beschränken.

Sei $r = R + iy_{max}$ der Punkt, an dem die numerische Integration abgebrochen werden kann. Dann berechnen wir die Coulomb-Funktionen, in dem wir an einem Ende des Integrationsweges ihre auch für komplexe Argumente r gültige Darstellung durch asymptotische Reihen[61] benutzen und mit diesen Startwerten die Funktionswerte längs des Weges durch Integration der Coulomb-Schrödinger-Gleichung bestimmen.

Um numerisch stabile Ergebnisse zu erzielen, muß in Richtung wachsender Werte der Lösung der Differentialgleichung integriert werden, - d.h. die Funktion $H_\ell^{(-)}$ von R nach $R+iy_{max}$ und die Funktion $H_\ell^{(+)}$ von $R+iy_{max}$ nach R.

Das Verfahren zur Berechnung der Funktionen F_ℓ und G_ℓ und damit auch $H_\ell^{(-)}$ auf der reellen Achse findet man in Ref.[62].

Die Coulomb-Funktionen $H_\ell^{(+)}$ bei $r = R+iy_{max}$ berechnet man per Rekursion aus den Funktionen $H_o^{(+)}$ und $H_o^{(+)\prime}$. Diese sind gegeben durch die asymptotischen Reihen[61]

$$H_0^{(+)}(\eta,\rho) = \frac{1}{k}\, e^{i\theta} \sum_{n=0}^{\infty} k_n , \qquad \text{(II.8)}$$

$$\frac{d}{d\rho} H_0^{(+)}(\eta,\rho) = \frac{i}{k}\, e^{i\theta} \left[\left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right) \sum_{n=0}^{\infty} k_n + \frac{i}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} n\, k_n \right] \qquad \text{(II.9)}$$

mit

$$k_{n+1} = k_n \frac{(n+1+i\eta)(n+i\eta)}{2i\rho\,(n+1)} \qquad \text{(II.10)}$$

und

$$\theta = \rho - \eta \ln 2\rho + \sigma_0 . \qquad \text{(II.11)}$$

Die Hankel-Funktionen $h_\ell^{(\pm)}$ ergeben sich durch Nullsetzen des Coulomb-Parameters η (und damit natürlich auch der Streuphase σ_o).

Unsere Rechnungen haben ergeben, daß die Reihen in (II.8, 9) mit 25 Summanden die Coulomb-Funktionen hinreichend genau (Fehler kleiner als 10^{-5}) approximieren, wenn

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\rho,\ \mathrm{Im}\,\rho &\geq \tfrac{5}{12}(\eta^2+4\eta+3) && \text{für } \eta \geq 3 \\ &\geq 10 && \text{für } \eta < 3 \end{aligned} \qquad \text{(II.12)}$$

gilt.

Literaturverzeichnis

1) G. R. Satchler, Nucl. Phys. 55 (1964) 1
2) N. Austern, Direct Nuclear Reaction Theories, Wiley, New York 1970
3) R. Santo, DWBA-Analyse direkter Kernreaktionen, Winterschule der DPG, Schleching 1970
4) R. Huby, J. R. Mines, Rev. Mod. Phys. 37 (1965) 406
5) J. V. Noble, Phys. Rev. C1 (1970) 1742
6) V. E. Bunakov, Nucl. Phys. A140 (1970) 241
7) V. E. Bunakov, K. A. Gridnev, L. V. Krasnov, Phys. Lett. 32B (1970) 587
8) V. E. Bunakov, K. A. Gridnev, L. V. Krasnov, Phys. Lett. 34B (1971) 27
9) V. E. Bunakov, K. A. Gridnev, L. V. Krasnov, Sovj. J. Nucl. Phys. 15 (1972) 508
10) H. W. Barz, V. E. Bunakov, A. M. El-Naiem, Nucl. Phys. A217 (1973) 141
11) F. S. Levin, Ann. Phys. 46 (1968) 41
12) J. Bang, J. Zimányi, Nucl. Phys. A139 (1969) 534
13) R. Huby, Phys. Lett. 33B (1970) 323
14) B. J. Cole, R. Huby, J. R. Mines, Phys. Lett. 33B (1970) 320
15) B. J. Cole, Ph.-D. Thesis, Chadwick Laboratory, University of Liverpool, Juli 1972
16) B. J. Cole, R. Huby, Phys. Lett. 46B (1973) 55
17) B. J. Cole, R. Huby, Q. K. K. Liu, J. Phys. A6 (1973) 1224
18) C. M. Vincent, H. T. Fortune, Phys. Rev. C2 (1970) 782
19) B. Schwesinger, W. Stocker, Phys. Lett. 39B (1972) 475
20) L. Schlessinger, G. L. Payne, Phys. Rev. C6 (1972) 2047
21) G. Baur, D. Trautmann, Nucl. Phys. A191 (1972) 321
22) G. Baur, D. Trautmann, Nucl. Phys. A199 (1973) 218
23) G. Baur, D. Trautmann, Z. Phys. 267 (1974) 103
24) I. S. Shapiro, Nucl. Phys. 28 (1961) 244
25) I. S. Shapiro, "Dispersion Theory of Direct Nuclear Reactions" in Selected Topics in Nuclear Theory, IAEA, Wien 1963

26) R. Lipperheide, Phys. Lett. 32B (1970) 555
27) I. Borbely, E. I. Dolinskii, V. V. Turovtsev, Sovj. J. Nucl. Phys. 8 (1969) 287
28) I. Borbely, Phys. Lett. 35B (1971) 388
29) I. Borbely, Phys. Lett. 37B (1971) 243
30) E. I. Dolinskii, P. O. Dzhamalov, A. M. Mukhamedzhanov, Nucl. Phys. A202 (1973) 97
31) E. I. Dolinskii, A. M. Mukhamedzhanov, Phys. Lett. 48B (1973) 95
32) K. Takeuchi, Nucl. Phys. A208 (1973) 1, 21, 46
33) R. Huby, Nucl. Phys. A167 (1971) 271
34) B. Gyarmati, R. G. Lovas, J. Zimányi, Phys. Lett. 35B (1971) 549
35) A. M. Lane, R. G. Thomas, Rev. Mod. Phys. 30 (1958) 257
36) M. A. Preston, Physics of the Nucleus, Addison Wesley Publ. Comp., Reading 1962
37) C. Mahaux, H. A. Weidenmüller, Shell Model Approach to Nuclear Reactions, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1969
38) R. D. Amado, Phys. Rev. Lett. 2 (1959) 399
39) G. F. Chew, F. E. Low, Phys. Rev. 113 (1959) 1640
40) J. S. Bell, Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 57
41) R. Lipperheide, K. Möhring, Phys. Lett. 39B (1972) 323
42) H. Fuchs, H. Homeyer, Th. Lorenz, H. Oeschler, Phys. Lett. 37B (1971) 285
43) H. Fuchs, H. Homeyer, H. Oeschler, R. Lipperheide, K. Möhring, Nucl. Phys. A196 (1972) 286
44) E. I. Dolinskii, L. D. Blokhintsev, A. M. Mukhamedzhanov, Sovj. J. Nucl. Phys. 1 (1965) 304
45) E. Gerjuoy, Ann. Phys. 5 (1958) 58
46) C. M. Vincent, Phys. Rev. 175 (1968) 1309
47) R. Lipperheide, K. Möhring, Nucl. Phys. A211 (1973) 125

48) M. Gell-Mann, M. L. Goldberger, Phys. Rev. 91 (1953) 398
49) F. Coester, L. Schlessinger, preprint Argonne, 1971
50) P. D. Kunz, University of Colorado, DWBA-code DWUCK, version 1968
51) U. Strohbusch, H. J. Körner, G. C. Morrison, J. P. Schiffer, Phys. Rev. Lett. 28 (1971) 47
52) D. Zeidnitz, H. Dubenkropp, R. Putzki, G. J. Koronac, S. Cierjacks, J. Nebe, C. B. Dover, Nucl. Phys. A166 (1971) 443
53) W. Bohne, H. Homeyer, H. Lettau, H. Morgenstern, J. Scheer, F. Sichelschmidt, Nucl. Phys. A128 (1969) 537
54) L. Rosen, J. G. Berry, A. S. Goldhaber, E. H. Auerbach, Ann. Phys. 34 (1965) 96
55) K. Möhring, R. Lipperheide, Nucl. Phys. A211 (1973) 136
56) J. Bommer, H. Fuchs, K.Grabisch, R. Lipperheide, K. Möhring, H. Oeschler, Proceedings of the Int. Conf. on Nucl. Phys., München 1973, Bd. 1, S. 503
57) J.Bommer, Doktorarbeit, HMI-P, in Vorbereitung
58) J. B. Gary, J. Rainwater, S. Wynchank, W. W. Havens, Jr., Int. Conf. of the Study of Nucl. Structure with Neutrons, Antwerpen 1965, Beitrag Nr. 74
59) Neutron Cross Sections, Brookhaven National Laboratory Report BNL 325, 2nd edition, Supplement 1, New York 1960
60) W. R. Smith, E. V. Ivash, Phys. Rev. 131 (1963) 304
61) M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publ., New York 1965
62) M. A. Melkanoff, T. Sawada, J. Raynal, "Nuclear Optical Model Calculations" in Methods of Computational Physics, Bd. 6, Academic Press, New York 1966

Diese Arbeit ist in der Arbeitsgruppe Theoretische Physik des Bereichs Kern- und Strahlenphysik des Hahn-Meitner-Instituts für Kernforschung in Berlin angefertigt worden.

Dabei haben mich B. Bohne, J. Bommer, B. J. Cole, J. Eichler, H. Fuchs, K. Grabisch, H. Kluge, I. Lang, E. Rutetzki, F. Sichelschmidt, A. Valentien und die Operateure der Rechenanlage S 4004 im Bereich Datenverarbeitung des HMI unterstützt und beraten.

Ihnen und vor allen R. Lipperheide für die überaus hilfreiche und anregende Zusammenarbeit sei hier von Herzen gedankt.

L e b e n s l a u f

Am 3.7.1946 wurde ich als Sohn des Facharztes der Chirurgie Dr. med. Rolf Möhring und seiner Ehefrau Annemarie geb. Kreuzberg in Fritzlar geboren. Nach dem Umzug der Familie nach Kassel im Winter 1946 besuchte ich vom Frühjahr 1952 bis Ostern 1956 die Bürgerschule Königstor in Kassel und anschließend das altsprachliche Friedrichs-Gymnasium zu Kassel, an dem ich im Februar 1965 das Abitur ablegte.

Mit Beginn des Sommersemesters 1965 nahm ich das Studium der Physik an der Philipps-Universität zu Marburg auf, wo ich im April 1967 das Vordiplom erwarb. Zum Wintersemester 1967/68 wechselte ich an die Freie Universität Berlin über und wurde im Oktober 1968 Diplomand bei Herrn Prof. J. Eichler am Hahn-Meitner-Institut für Kernforschung, Sektor Kernphysik, Berlin. Mit einer Arbeit "Zur Berechnung der Schalenkorrektur zur Energiefläche schwerer Kerne" legte ich im Juli 1970 das Diplomexamen in Theoretischer Physik ab. Danach blieb ich als Doktorand im Hahn-Meitner-Institut bei Herrn Dr. R. Lipperheide. Von August 1970 bis Januar 1971 arbeitete ich als wissenschaftlicher Angestellter im Hahn-Meitner-Institut. Seit Februar 1971 bin ich wissenschaftlicher Assistent im Fachbereich Physik der Freien Universität Berlin.

Ich bin seit September 1968 verheiratet und habe drei Kinder.